Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, S. Winkelmann

Klausur zur Vorlesung Analysis I im SoSe 2013

Musterlösung

Teil I [10 Punkte]
Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch oder nicht angekreuzte Aussage erhalten Sie 0 Punkte.

Die Aussagen beziehen sich stets auf die natürliche Metrik $d(x, y) = |x - y|$.

wahr	falsch	Aussage
x		Konvergiert eine Folge in $\mathbb{Q}$, dann konvergiert sie auch in $\mathbb{R}$.
x		Es gibt Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$, die keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ haben.
x		Es existiert eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$.
	x	Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Dann ist auch $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.
	x	Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt Lipschitzstetigkeit.
	x	Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
	x	Ist eine Funktion stetig und differenzierbar, so ist sie auch stetig differenzierbar.
x		Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 10\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
	x	$\mathbb{Z}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.
x		Beschränkte und monotone Folgen in $\mathbb{R}$ sind konvergent.

Teil II [12 Punkte]
Bearbeiten Sie **genau drei** der folgenden Aufgaben a)-d). Bitte machen Sie kenntlich, für welche Aufgaben Sie sich entschieden haben.

a) (4 Punkte) Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{2n+\sin(n)}{1+n}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) (4 Punkte) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

auf Konvergenz.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}, & \text{falls } x \neq \frac{1}{2}, \\ a, & \text{falls } x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

d) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^2-1}.$$

Lösung:
a) Es gilt

$$a_n = \frac{2n+\sin(n)}{1+n} = \frac{2+\frac{\sin(n)}{n}}{\frac{1}{n}+1}.$$

Da $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d.h. $\frac{\sin(n)}{n}$ ist eine Nullfolge. Damit konvergiert der Zähler $2+\frac{\sin(n)}{n}$ gegen 2 und der Nenner $\frac{1}{n}+1$ gegen 1, und insgesamt ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{\sin(n)}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \frac{2}{1} = 2.$$

b) Wende das Quotientenkriterium an: Es gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \frac{\sqrt{n+1}\cdot 2^n}{\sqrt{n}\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+1/n}{1}}.$$

Für $n \geq 1$ ist

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+1/n}{1}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+1}{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} =: q.$$

Es gilt $q < 1$. Somit ist das Quotientenkriterium erfüllt und die Reihe konvergiert.

c) Für $x \neq \frac{1}{2}$ ist die Funktion als Komposition stetiger Funktionen stetig. Für $x = \frac{1}{2}$ betrachte den Grenzwert $\lim_{x\to\frac{1}{2}, x\neq\frac{1}{2}} f(x)$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}, x\neq\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}, x\neq\frac{1}{2}} \frac{x^2-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}, x\neq\frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Setze also $a = 1$, damit die Funktion auch stetig bei $x = \frac{1}{2}$ ist.

d) Es gilt sowohl $\lim_{x\to 1} \log x = 0$ als auch $\lim_{x\to 1}(x^2 - 1) = 0$. Beide Komponenten sind differenzierbar, also lässt sich die Regel von l'Hôpital anwenden und es ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\log x)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Teil III [10 Punkte]
Bitte bearbeiten Sie **alle** der folgenden Aufgaben.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$, und $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -1 + x$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [0, \pi]$, $x_0 \neq 0$, gibt, für dass $f(x) = g(x)$ gilt.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz an.

Lösung:
Betrachte die Funktion

$$h(x) := g(x) - f(x) = -1 + x - \sin(x)\,,$$

die als Differenz stetiger Funktionen wieder stetig ist und für die gilt, dass $h(0) = -1 - \sin(0) = -1 < 0$ sowie $h(\pi) = -1 + \pi - \sin(\pi) = -1 + \pi > 1$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es für jedes $y \in [h(0), h(\pi)]$ ein $x \in [0, \pi]$, so dass $h(x) = y$, insbesondere gibt es ein $x_0 \in [0, \pi]$ mit der Eigenschaft $h(x_0) = 0$. Mit anderen Worten:

$$\exists x_0 \in [0, \pi] \quad \text{mit} \quad f(x_0) = g(x_0)\,.$$

Wegen $h(0) < 0$, d.h. $g(0) < f(0)$ ist $x_0 \neq 0$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es sei X eine endliche Menge und $f : X \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv} \iff f \text{ bijektiv}$$

Lösung:
Es sei $|X| = n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Elemente von X.
"f injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv": Sei f injektiv. Dann wird jedes Element aus dem Bildbereich X maximal einmal angenommen. D.h., für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ folgt $f(x) \neq f(y)$. Da aber jedes der n Elemente des Urbildbereiches einen Funktionswert benötigt und kein Funktionswert doppelt vergeben werden kann, muss es auch n verschiedene Funktionswerte geben. Also werden alle n Werte des Bildbereiches angenommen, und somit ist die Funktion surjektiv.
"f surjektiv $\Rightarrow$ f bijektiv": Sei f surjektiv. Dann werden alle n Werte aus dem Bildbereich X angenommen. Da es aber nur n verschiedene Werte im Urbildbereich gibt, dürfen je zwei dieser Werte niemals den gleichen Funktionswert haben, d.h., für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ muss $f(x) \neq f(y)$ gelten. Damit ist die Funktion auch injektiv. Da die Funktion f also surjektiv und injektiv ist, ist sie auch bijektiv.
"f bijektiv $\Rightarrow$ f injektiv": Als bijektive Funktion ist f folgt nach Definition insbesondere injektiv.