Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

10. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Lösungsvorschlag

1. Aufgabe (Offen und abgeschlossen, 4 Punkte)
Überprüfen Sie die folgenden Teilmengen A des jeweiligen metrischen Raumes (X, d) auf Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit, wobei $X \subset \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$.

a) $A = [1, \infty)$ als Teilmengen von $X = \mathbb{R}$

b) $A = [1, 5)$ als Teilmengen von (i) $X = \mathbb{R}$ und (ii) $X = (-\infty, 5)$

c) $A = [1, 5) \cup (3, 10] \cup [-3, -2]$ als Teilmengen von $X = \mathbb{R}$

d) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ als Teilmengen von $X = \mathbb{R}$

Lösungsvorschlag:
a) A ist abgeschlossen, da das Komplement $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 1)$ offen ist. Begründung: Für $x \in (-\infty, 1)$ wähle $\varepsilon = 1 - x > 0$. Dann folgt aus $|x - y| < \varepsilon$ insbesondere $y < x + \varepsilon = 1$, also $y \in (-\infty, 1)$.
A ist nicht kompakt, da nicht beschränkt.

b) (i) A ist weder offen noch abgeschlossen und erst recht nicht kompakt. Begründung: Jede ε-Kugel um $1 \in A$ schneidet das Komplement $\mathbb{R} \setminus A$; daher ist A nicht offen. Das Komplement $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 1) \cup [5, \infty)$ ist auch nicht offen, da jede ε-Kugel um $5 \in \mathbb{R} \setminus A$ die Menge A schneidet; daher ist A nicht abgeschlossen.
(ii) A ist abgeschlossen und kompakt, aber nicht offen. Begründung: Das Komplement $(-\infty, 5) \setminus A = (-\infty, 1)$ ist offen; daher ist A abgeschlossen. Jede ε-Kugel um $1 \in A$ schneidet das Komplement $(-\infty, 1)$; daher ist A nicht offen. A ist nicht kompakt, da es eine Folge in A gibt, die keine (in A) konvergente Teilfolge hat, z.B. $x_n = 5 - \frac{1}{n}$.

c) Es ist $A = [1, 10] \cup [-3, -2]$. Beide Intervalle sind abgeschlossen, daher ist auch A als endliche Vereinigung abgeschlossen. A ist kompakt, da beschränkt und abgeschlossen.

d) A ist nicht offen: Um $1 \in A$ kann keine ε-Kugel gelegt werden, die komplett in A liegt, denn jede solche ε-Kugel enthält Elemente, die größer als 1 und damit nicht in A enthalten sind.
A ist auch nicht abgeschlossen: Um $0 \in \mathbb{R} \setminus A$ kann keine ε-Kugel gelegt werden, die A nicht schneidet, da die Elemente aus A als Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergieren.

2. Aufgabe (Einheitskugeln, 4 Punkte)
Es sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* auf X, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $||x|| \geq 0$ für alle $x \in X$, und $||x|| = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ ist.

(ii) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$.

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $x, y \in X$.

Das Paar $(X, || \cdot ||)$ heißt *normierter Raum*.

Eine Norm induziert eine Metrik auf X durch

$$d(x,y) := ||x-y||.$$

Für einen metrischen Raum (X,d) und $\varepsilon > 0$ ist die ε-Kugel um einen Punkt $x_0 \in X$ definiert als

$$\mathcal{B}(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) < \varepsilon\}.$$

Im folgenden sei $X = \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die ε-Kugeln um $x_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ für $\varepsilon = 1$, wobei die Metrik d durch die folgenden Normen induziert sei:

a) $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

b) $||x||_1 = |x_1| + |x_2|$,

c) $||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Sind diese Kugeln jeweils offen, abgeschlossen oder beides? Geben Sie außerdem jeweils das Innere $\overset{\circ}{\mathcal{B}}(X_0,\varepsilon)$, den Abschluss $\bar{\mathcal{B}}(x_0,\varepsilon)$ und den Rand $\partial\mathcal{B}(x_0,\varepsilon)$ der Kugeln an.

Zusatz: Wie würden diese Kugeln in $X = \mathbb{R}$ aussehen?

Lösungsvorschlag:
Bilder: a) Kreis mit Radius 1, b) Raute mit Diagonallänge 2, c) Quadrat mit Seitenlänge 2, vgl. Behrends Seite 174.
Die Kugeln sind jeweils offen, aber nicht abgeschlossen.
Es ist

$$\overset{\circ}{\mathcal{B}}(X_0,\varepsilon) = \mathcal{B}(X_0,\varepsilon),$$

$$\bar{\mathcal{B}}(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}$$

und

$$\partial\mathcal{B}(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,x_0) = \varepsilon\}.$$

Zusatz: In $\mathbb{R}$ sind die Kugeln immer Intervalle von der Länge 2.

3. Aufgabe (Offen und abgeschlossen II, 4 Punkte)
Man betrachte die Menge

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 + px + q;\ p,q \in \mathbb{R}\}$$

aller normierten quadratischen Polynome auf $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(f,g) = ||(p_f,q_f) - (p_g,q_g)||_2$, wobei $f(x) = x^2 + p_f x + q_f$ und $g(x) = x^2 + p_g x + q_g$.
Ist die Teilmenge

$$A = \{f \in X : f \text{ hat genau eine reelle Nullstelle}\} \subset X$$

offen oder abgeschlossen in (X,d)?

Lösungsvorschlag:
Ein Polynom $f \in X$, $f(x) = x^2 + px + q$ hat genau dann nur eine reelle Nullstelle, falls die Diskriminante $\frac{p^2}{2} - q$ den Wert Null annimmt, vgl. p-q-Formel. D.h., es ist

$$A = D^{-1}(\{0\}),$$

wobei

$$D : (X,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad D(f) = \frac{p^2}{2} - q.$$

Diese Funktion ist stetig, und die Menge $\{0\}$ ist abgeschlossen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Damit ist die gesuchte Menge A als stetiges Urbild einer abgeschlossenen Menge selbst abgeschlossen.

4. Aufgabe (Stetige Funktionen, 4 Punkte)
Begründen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden Wert in $\mathbb{R}$ genau zweimal annimmt.

Hinweis: Eine solche Funktion hätte insbesondere zwei Nullstellen. Verwenden Sie den Satz vom Maximum und Minimum.

Lösungsvorschlag:
Beweis durch Widerspruch: Angenommen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert in $\mathbb{R}$ genau zweimal an. Dann gibt es insbesondere genau zwei Nullstellen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b) = 0$. Es sei o.B.d.A. $a < b$. Betrachte die Einschränkung $f_{[a,b]}$ von f auf dem Intervall $[a, b]$. Da es keine weiteren Nullstellen gibt, ist $f_{[a,b]}$ entweder überall positiv oder überall negativ.

<u>Fall 1:</u> $f(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum nimmt $f_{[a,b]}$ als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall Maximum und Minimum an. Das Minimum ist durch $f_{[a,b]}(a) = f_{[a,b]}(b) = 0$ gegeben. Sei $x_0 \in (a, b)$ die Maximalstelle, d.h., es gelte

$$f_{[a,b]}(x) \leq f_{[a,b]}(x_0) \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \tag{1}$$

Sei nun $y > f(x_0)$. Wegen (1) gibt es kein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Genauso gibt es aber auch kein $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ mit $f(x) = y$, denn außerhalb von $[a, b]$ ist f überall negativ. D.h., ein der Wert y wird von f gar nicht angenommen, erst recht nicht genau zweimal.

<u>Fall 2:</u> $f(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$. Analog: Betrachte diesmal $y < f(x_0)$, wobei $x_0 \in [a, b]$ Minimalstelle von $f_{[a,b]}$.