Lösungsvorschlag zum dritten Übungszettel Analysis I, SoSe 2013

Aufgabe 3: Folgern Sie aus den Körperaxiomen "minus mal minus ist plus"!

Zuerst sollte man sich klar machen, was die Axiome eines Körpers $\mathbb{K}$ sind, d.h. welche Voraussetzungen wir gegeben haben. Diese sind:

1. Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz für die Operationen $+$ und $\cdot$
2. Existenz des additiv neutralen Elementes 0:
   $a + 0 = a \ \forall a \in \mathbb{K}$
3. Für jedes Element existiert ein additiv inverses Element:
   $\forall a \in \mathbb{K} \ \exists \ (-a) \in \mathbb{K} : \ a + (-a) = 0$
4. Existenz des multiplikativ neutralen Elements 1:
   $a \cdot 1 = a \ \forall a \in \mathbb{K}$
5. Für jedes Element (außer 0) existiert ein multiplikativ inverses Element:
   $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ \exists \ (a^{-1}) \in \mathbb{K} : \ a \cdot (a^{-1}) = 1$
6. $1 \neq 0$

Das sind unsere Voraussetzungen, alles weitere muss bewiesen werden! Wir wollen zeigen:
$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \ \forall a, b \in \mathbb{K}$
Dazu:
$(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-b) = a \cdot (-1) \cdot (-b) = a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot b = a \cdot b$

Das sieht korrekt aus, wir nutzen das Assoziativ- und Kommutativgesetz aus. Allerdings verwenden wir auch viele andere Dinge , die nicht durch die Körperaxiome gegeben sind! Diese beweisen wir jetzt.
Schritt 1: $(-a) = (-1) \cdot a \ \forall a \in \mathbb{K}$
Beweis:

$$
\begin{aligned}
(-1) \cdot a &= (-1) \cdot a + 0 && (1)\\
&= (-1) \cdot a + a + (-a) && (2)\\
&= (-1) \cdot a + 1 \cdot a + (-a) && (3)\\
&= (-1 + 1) \cdot a + (-a) && (4)\\
&= 0 \cdot a + (-a) && (5)\\
&= -a && (6)
\end{aligned}
$$

In (1) nutzen wir die Eigenschaft der 0, in (2) das additiv Inverse, in (3) die Eigenschaft der 1 und (4) das Distributivgesetz. Allerdings wird in (5)

ausgenutzt, dass $0 \cdot a = 0$ sein soll und auch das ist zu beweisen!
Schritt 2: $a \cdot 0 = 0 \ \forall a \in \mathbb{K}$
Beweis:

$$\begin{align} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 \tag{7}\\ &= 0 \cdot a + a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) \tag{8}\\ &= a \cdot (0+0) + (-(a \cdot 0)) \tag{9}\\ &= a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) \tag{10}\\ &= 0 \tag{11}\end{align}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $-(a \cdot 0)$ das additiv Inverse zu $a \cdot 0$ ist und dieses Element existiert immer, völlig unabhängig davon, ob wir bereits wissen, was $a \cdot 0$ ist, oder nicht!

Schritt 3: $(-1) \cdot (-1) = 1$
Beweis:

$$\begin{align} 0 &= (-1) \cdot 0 \tag{12}\\ &= (-1) \cdot (1 + (-1)) \tag{13}\\ &= (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \tag{14}\\ &= (-1) + (-1) \cdot (-1) \tag{15}\end{align}$$

(12) benutzt Schritt 2, (14) das Distributivgesetz. In der letzten Zeile steht nun, dass $(-1) \cdot (-1)$ das additiv inverse Element zu (-1) sein muss und dieses ist 1, also gilt:

$$(-1) \cdot (-1) = 1$$

Damit haben wir alles, was wir brauchen, mit den Axiomen des Körpers hergeleitet und die eingangs aufgestellte Gleichungskette gilt!

Aufgabe 4: Folgern Sie aus dem Archimedes-Axiom, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt!

Das Archimedes-Axiom besagt: $\forall x \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \leq n$ gilt.
Wir wollen zeigen: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, gibt es ein $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z})$ so dass $a < q < b$ gilt.

Beweis: Weil $a < b$ ist, gilt $(b-a) > 0$ und damit auch $\frac{1}{b-a} > 0$. Nach dem Archimedes-Axiom gibt es ein $n' \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{b-a} \leq n'$ und wegen des induktiven Aufbaus von $\mathbb{N}$ somit auch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{b-a} < n$ Es gilt

$$\frac{1}{b-a} < n \Leftrightarrow na < nb - 1$$

Wir wählen nun $m \in \mathbb{Z}$ minimal, so dass $nb \leq m + 1$ gilt. Das liefert

$$nb \leq m + 1 \Leftrightarrow nb - 1 \leq m$$

und, weil m eben minimal ist:

$$m < nb$$

Wir fügen alles zusammen und erhalten:

$$na < nb - 1 \leq m < nb$$

und damit

$$na < m < nb$$

und schließlich

$$a < \frac{m}{n} < b$$