Lösungsvorschlag zum vierten Übungszettel Analysis I, SoSe 2013

Aufgabe 1: Lemma von Gauß: Seien $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, ..., n-1$ und sei $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Zu zeigen: Falls $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0$ erfüllt, so ist $x \in \mathbb{Z}$ oder irrational.
Beweis:
Wir führen den Beweis per Widerspruch und nehmen an, dass $f(x) = 0$ gilt und dass $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine echte rationale Zahl ist, d.h. $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 1$, außerdem soll dieser Bruch vollständig gekürzt sein. Dann gilt:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \tag{2}$$

$$\Longleftrightarrow p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \tag{3}$$

$$\Longleftrightarrow p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = 0 \tag{4}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass dann q ein Teiler von p^n ist. Damit ist q aber auch ein Teiler von p. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\frac{p}{q}$ ein vollständig gekürzter Bruch und $q > 1$ ist. Also ist entweder die Annahme, dass $q > 1$ ist, falsch oder die Annahme $x \in Q$ kann nicht stimmen. Ersteres bedeutet, dass $q = 1$ wäre und dann ist $x \in \mathbb{Z}$. Im zweiten Fall wäre x nicht in $\mathbb{Q}$ und damit irrational. Das war zu zeigen.