Lösungsvorschlag zum fünften Übungszettel Analysis I, SoSe 2013

Aufgabe 4:

Wir definieren $x := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ und wollen zeigen, dass $x_n \to x$ gilt.
Dazu stellen wir zunächst fest, dass, weil (x_n) nach oben beschränkt ist, ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass gilt: $x_n \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$. Also ist M eine obere Schranke und weil x per Definition die kleinste obere Schranke ist gilt: $x := \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq M$, und somit ist $x \in \mathbb{R}$ (und nicht unendlich; wir brauchen also die Beschränktheit, damit das Supremum existiert).
Los geht's mit dem Beweis der Konvergenz:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach Definition des Supremums gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$x - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq x$$

(Gäbe es kein solches n_0, dann wäre $x - \varepsilon$ eine kleinere obere Schranke für (x_n) als x und das kann nicht sein, da x als Supremum definiert ist!)
Wegen der Monotonie gilt nun allerdings auch

$$x - \varepsilon \leq x_{n_0} \leq x_{n_0+1} \leq x_{n_0+2} \leq x_{n_0+3} \leq ... \leq x$$

und somit gilt $\forall n \geq n_0$

$$x - \varepsilon \leq x_n \leq x$$

Aus dieser Ungleichung folgt sofort:

$$|x - x_n| = x - x_n \leq x - (x - \varepsilon) = |x - (x - \varepsilon)| = \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und das war zu zeigen.
Bemerkungen:

Lässt man (i) weg, muss die Folge nicht mehr konvergent sein. Beispiel: $x_n := n$ ist monoton steigend, aber nicht nach oben beschrnkt, und konvergiert nicht gegen eine reelle Zahl, sondern wird unendlich groß.

Lässt man (ii) weg, muss die Folge nicht mehr konvergent sein. Beispiel: $x_n := -n$ ist nach oben durch $M = 0$ beschrnkt, aber nicht monoton steigend, und konvergiert nicht gegen eine reelle Zahl, sondern wird unendlich klein. Anderes Beispiel: $x_n = a_n$ aus Aufgabe 3a).

Die Aufgabe sagt aus: **Wenn** eine Folge **beschränkt und monoton** ist, **dann** ist sie **konvergent**! Die Umkehrung gilt nicht: Nicht jede konvergente Folge ist monoton. (Bsp: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist eine nicht-monotone Nullfolge). Allerdings ist jede konvergente Folge beschränkt.