Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

8. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Lösungsvorschlag

1. Aufgabe (Reihenkonvergenz, 4 Punkte)
Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Den Grenzwert müssen Sie nicht berechnen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

Lösungsvorschlag:
a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium: Für $n \geq 3$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{9} =: q$$

mit $0 \leq q < 1$.
Alternativ kann man auch das Wurzelkriterium nutzen zusammen mit der Tatsache, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ gilt.

b) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n^n}$ konvergiert nach dem Wurzelkriterium: Für $n \geq 2$ gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} =: q$$

mit $0 \leq q < 1$.
Alternativ kann man auch das Leibnizkriterium anwenden: Die a_n sind alternierend und es gilt $a_n \to 0$ sowie $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{n^n} = |a_n|$.

c) Für $\alpha > 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ nach dem Leibnizkriterium: Die a_n sind alternierend und es gilt $a_n \to 0$ sowie $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha} = |a_n|$.
Für $\alpha \leq 0$ konvergiert die Reihe nicht, da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann gar keine Nullfolge ist.