Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, S. Winkelmann

Nachklausur zur Vorlesung
Analysis I
im SoSe 2013

Musterlösung

Teil I
Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch oder nicht angekreuzte Aussage erhalten Sie 0 Punkte.

Die Aussagen beziehen sich stets auf die natürliche Metrik $d(x, y) = |x - y|$.

wahr	falsch	Aussage
	x	Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| \leq 1$ ist stets konvergent.
x		Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall besitzt mindestens ein Maximum.
x		Es gibt Mengen, die ein Supremum, jedoch kein Maximum haben.
x		Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.
x		Jede konstante Folge ist eine Cauchy-Folge.
x		Der Körper $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden.
x		Eine konvergente Folge in $\mathbb{Z}$ ist stets ab einem Index konstant.
	x	Die Menge der rationalen Zahlen ist gleichmächtig zu der Menge der irrationalen Zahlen.
	x	Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind kompakt.
	x	Für Teilmengen A, B einer Menge M gilt $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.
	x	Jede Teilfolge einer divergenten Folge ist ebenfalls divergent.

Teil II

Bearbeiten Sie **genau drei** der folgenden Aufgaben a)-d).

a) Untersuchen Sie die Folge $a_n = (-1)^n \frac{2n^2+n}{5n^2+\sqrt{n}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Untersuchen Sie die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$
auf Konvergenz.

c) Untersuchen Sie die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$
auf Differenzierbarkeit.

d) Bestimmen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x \to 0} x \log(x).$$

Lösungsskizze:

a) Konvergente alternierende Folgen sind immer Nullfolgen; die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist alternierend; zu überprüfen ist also, ob
$$b_n = \frac{2n^2+n}{5n^2+\sqrt{n}}$$
eine Nullfolge ist. Das ist nicht der Fall, denn
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{5n^2+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+n^{-1}}{5+n^{-3/2}} = \frac{2}{5}.$$
Die Folge ist demnach nicht konvergent.

b) Die Reihe ist konvergent – entweder man erkennt die Exponentialreihe
$$e^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!},$$
oder man wendet das Quotientenkriterium auf die Reihe $\sum_n a_n$ mit $a_n = 3^n/n!$ an:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)!}\right| = \left|\frac{3}{n+1}\right| \leq \frac{3}{4} \quad \text{für} \quad n > 3.$$

c) Für $x \neq 0$ ist die Funktion differenzierbar mit Ableitung
$$f'(x) = \sin(1/x) - \frac{1}{x}\cos(1/x), \quad x \neq 0.$$
An der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht differenzierbar, denn der Grenzwert
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \sin(1/h)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(1/h) \quad (h \neq 0)$$
existiert nicht.

d) Wir wenden den Satz von l'Hôpital auf

$$x \log(x) = \frac{\log(x)}{1/x}$$

an. Zähler und Nenner sind jeweils differenzierbar, und wir erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0\,.$$

Teil III
Bitte bearbeiten Sie **alle** der folgenden Aufgaben.

Aufgabe 1
Es seien $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie: Gilt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [0,1]$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass sogar stets $f(x) + \varepsilon \leq g(x)$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaften stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen.

Lösungskizze:
Wir wenden den Satz vom Maximum und Minimum auf die stetige Funktion

$$h\colon [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad h(x) = g(x) - f(x)$$

an. Nach dem Satz nimmt die Funktion ihr Minimum auf $[0,1]$ an, und wir können einfach $\varepsilon = \min\{h(x)\colon 0 \leq x \leq 1\}$ setzen. Damit ist

$$h(x) = g(x) - f(x) \geq \varepsilon\,,$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 2
Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit:

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Lösungskizze:

a) Wäre A offen, dann müsste es zu jedem $a \in A$ eine Umgebung $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ geben, die vollständig in A enthalten ist, d.h., alle $a \in A$ müssten innere Punkte sein. Da aber die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, liegt in jeder noch so kleinen Umgebung $U_\varepsilon(a)$ mindestens eine positive irrationale Zahl $b \notin A$. Also ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht offen.

   Aus dem gleichen Grund ist auch das Komplement $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ nicht offen.

   Demnach ist A weder offen noch abgeschlossen.

b) Die Menge $B \subset \mathbb{C}$ ist abgeschlossen, da ihr Komplement $B^c = \mathbb{C} \setminus B$ nur innere Punkte enthält und somit offen ist.

Ende der Klausuraufgaben