Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

10. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Abgabe bis Donnerstag, 27. Juni 2013, 16 Uhr

1. Aufgabe (Offen und abgeschlossen, 4 Punkte)
Überprüfen Sie die folgenden Teilmengen A des jeweiligen metrischen Raumes (X, d) auf Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit, wobei $X \subset \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$.

a) $A = [1, \infty)$ als Teilmengen von $X = \mathbb{R}$

b) $A = [1, 5)$ als Teilmengen von (i) $X = \mathbb{R}$ und (ii) $X = (-\infty, 5)$

c) $A = [1, 5) \cup (3, 10] \cup [-3, -2]$ als Teilmengen von $X = \mathbb{R}$

d) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ als Teilmengen von $X = \mathbb{R}$

2. Aufgabe (Einheitskugeln, 4 Punkte)
Es sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* auf X, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $||x|| \geq 0$ für alle $x \in X$, und $||x|| = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ ist.

(ii) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$.

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $x, y \in X$.

Das Paar $(X, ||\cdot||)$ heißt *normierter Raum.*

Eine Norm induziert eine Metrik auf X durch

$$d(x, y) := ||x - y||.$$

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\varepsilon > 0$ ist die ε-Kugel um einen Punkt $x_0 \in X$ definiert als

$$\mathcal{B}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Im folgenden sei $X = \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die ε-Kugeln um $x_0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ für $\varepsilon = 1$, wobei die Metrik d durch die folgenden Normen induziert sei:

a) $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

b) $||x||_1 = |x_1| + |x_2|$,

c) $||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Sind diese Kugeln jeweils offen, abgeschlossen oder beides? Geben Sie außerdem jeweils das Innere $\mathring{\mathcal{B}}(X_0, \varepsilon)$, den Abschluss $\bar{\mathcal{B}}(x_0, \varepsilon)$ und den Rand $\partial\mathcal{B}(x_0, \varepsilon)$ der Kugeln an.

Zusatz: Wie würden diese Kugeln in $X = \mathbb{R}$ aussehen?

3. Aufgabe (Offen und abgeschlossen II, 4 Punkte)
Man betrachte die Menge

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 + px + q;\ p, q \in \mathbb{R}\}$$

aller normierten quadratischen Polynome auf $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(f, g) = ||(p_f, q_f) - (p_g, q_g)||_2$, wobei $f(x) = x^2 + p_f x + q_f$ und $g(x) = x^2 + p_g x + q_g$.
Ist die Teilmenge

$$A = \{f \in X : f \text{ hat genau eine reelle Nullstelle}\} \subset X$$

offen oder abgeschlossen in (X, d)?

4. Aufgabe (Stetige Funktionen, 4 Punkte)
Begründen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden Wert in $\mathbb{R}$ genau zweimal annimmt.

Hinweis: Eine solche Funktion hätte insbesondere zwei Nullstellen. Verwenden Sie den Satz vom Maximum und Minimum.