Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

11. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Zur Wiederholung und Klausurvorbereitung

1. Aufgabe
Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen "wahr" oder "falsch" sind.

wahr	falsch	Aussage
		Die Menge $\mathbb{R}$ ist abzählbar.
		In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.
		Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.
		Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
		Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a. Dann folgt aus $a_n > 0$ für all $n \in \mathbb{N}$ auch $a > 0$.
		Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$ ist leer.
		Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Dann ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.
		Konvergiert eine Reihe absolut, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.
		Für eine streng monoton steigende, differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
		Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 10\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
		Beschränkte Folgen sind konvergent.
		Die komplexen Zahlen bilden einen vollständigen Körper.

2. Aufgabe
Zeigen Sie mithilfe von vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n.$$

3. Aufgabe
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

auf Konvergenz.

4. Aufgabe
Beweisen Sie: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Hinweis: Konstruieren Sie in Abhängigkeit von f eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = g(b)$, für die Sie den Satz von Rolle anwenden können.

5. Aufgabe
Untersuchen Sie die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

6. Aufgabe
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1/x}$

7. Aufgabe
Bestimmen Sie die n-te Taylorentwicklung für das Polynom $p(x) = 1 + 2x - 3x^3$ an der Stelle $x_0 = -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.