Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

2. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Abgabe bis Donnerstag, 2. Mai 2013, 16 Uhr

Achtung: Es gibt insgesamt vier Aufgaben.

1. Aufgabe (Abbildungen, 4 Punkte)
Welche der folgenden Zuordnungsvorschriften definieren Abbildungen? Wie kann man die Vorschriften gegebenenfalls abändern, um eine Abbildung zu erhalten? Bestimmen Sie jeweils das Bild der Abbildungen und zeichnen Sie den Graphen.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{x+1}$

b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\, n \mapsto 5^n$

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2} - x, & x \leq 1 \end{cases}$

Für die nächsten Aufgaben benötigen wir die folgende Definition: Für eine Abbildung $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $C \subset Y$ heißt

$$f^{-1}(C) := \{x \in X : f(x) \in C\}$$

Urbild von C unter f.

2. Aufgabe (Injektivität, 4 Punkte)
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f ist injektiv.

b) $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subset X$.

c) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subset X$.

3. Aufgabe (Äquivalenzklassen, 4 Punkte)

a) Es sei $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ die charakteristische Funktion der Menge $A \subset X$. Man betrachte die Äquivalenzrelation $\sim$ auf X definiert durch $x \sim y$ genau dann, wenn $\chi_A(x) = \chi_A(y)$. Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen durch
$$[x] = \chi_A^{-1}(\chi_A(x))$$
gegeben sind.

b) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Zeigen Sie, dass $X/\sim$ eine Zerlegung von X ist, d.h. es gilt
$$X = \dot{\bigcup_{x \in X}} [x] \quad \text{(disjunkte Vereinigung)}.$$

4. Aufgabe (Körper, 4 Punkte)
Man betrachte die Menge $K = \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ definiert durch

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1,$$

$$0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0, \quad 1 \odot 1 = 1.$$

Zeigen Sie, dass $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper ist.