Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

3. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Abgabe bis Mittwoch, 08. Mai 2013, 18 Uhr

1. Aufgabe (Angeordnete Körper, 4 Punkte)

a) Es sei $(K, +, \cdot, P)$ ein angeordneter Körper und $x, y, z \in K$. Wir definieren "$x \leq y$" durch "$x < y$ oder $x = y$", wobei $x < y$ bedeutet, dass $y - x \in P$ gilt. Zeigen Sie: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivität).

b) Sei $A \subset P$ eine endliche Teilmenge des Positivbereichs P. Zeigen Sie, dass die Menge A ein größtes Element $x^* \in A$ enthält, d.h. es gibt ein $x^* \in A$ mit $x^* \geq x$ für alle $x \in A$.

c) Zeigen Sie, dass ein endlicher Körper nicht angeordnet werden kann.

2. Aufgabe (Vollständige Induktion, 4 Punkte)

a) Man zeige mithilfe von vollständiger Induktion: Für $n \geq 4$ gilt $n! > 2^n$.

b) Wo steckt der Fehler?
Friseur-Theorem: Alle Menschen sind blond.
Beweis: Da es nur endlich viele Menschen gibt und zumindest einige blond sind, genügt es zu zeigen, dass in jeder Menge von $n \in \mathbb{N}$ Menschen, in der ein Mensch blond ist, alle blond sind. Der Beweis wird mittels Induktion geführt. Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist offensichtlich richtig. Für den Induktionsschluss $n \to n+1$ betrachte man eine Menge von $n+1$ Menschen $\{M_1, M_2, ..., M_n, M_{n+1}\}$, wobei o.B.d.A. M_1 blond ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann $M_1, M_2, ..., M_n$ blond und auch $M_1, .M_2, ..., M_{n-1}, M_{n+1}$. Damit sind aber alle $M_1, M_2, ..., M_n, M_{n+1}$ blond.

3. Aufgabe (Rechenregeln, 4 Punkte)
Wie erklären Sie einem Schüler die Regel "*minus mal minus ist plus*"? Folgern Sie die Regel anschließend aus den Körperaxiomen für $\mathbb{R}$.

4. Aufgabe ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, 4 Punkte)
Das Archimedes-Axiom besagt, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq x$ gibt.
Zeigen Sie unter Annahme des Archimedes-Axioms, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, d.h., zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.