Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

4. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Abgabe bis Donnerstag, 16. Mai 2013, 16 Uhr

1. Aufgabe (Satz von Gauß, 4 Punkte)
Beweisen Sie den folgenden Satz von Gauß: Es seien $a_0, ..., a_{n-1}$ ganze Zahlen, und $x \in \mathbb{R}$ erfülle

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0.$$

Dann ist x eine ganze Zahl oder irrational.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ein vollständig gekürzter Bruch ist mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ und $q > 1$, und nutzen Sie die Tatsache, dass die Primfaktoren von p und p^n $(n \in \mathbb{N})$ übereinstimmen.

2. Aufgabe (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

3. Aufgabe (Rechenregeln auf $\mathbb{C}$, 4 Punkte)

a) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ und $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

b) Es sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie $|z|^2 = z\bar{z}$.

c) Für $\Phi \in \mathbb{R}$ ist $e^{i\Phi} := \cos\Phi + i\sin\Phi \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie $e^{i\pi} = -1$.

d) Wo steckt hier der Fehler? $2 = \sqrt{(-2)(-2)} = \left(i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right) = i^2 2 = -2$

4. Aufgabe (Komplexe Zahlen in der Schule, 4 Punkte)
Diskutieren Sie den Einsatz komplexer Zahlen im Mathematikunterricht, indem Sie

1. herausstellen, in welchem Umfang der Einsatz komplexer Zahlen im Lehrplan verankert ist,
2. Beispiel für den Einsatz komplexer Zahlen nennen und
3. eine Aufgabe entwickeln und lösen, die komplexe Zahlen beinhaltet.