Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

5. Übung zur Vorlesung

# Analysis I

Sommersemester 2013

**Abgabe bis Donnerstag, 23. Mai 2013, 16 Uhr**

**1. Aufgabe** (Folgen mit positivem Grenzwert, 4 Punkte)
Stellen Sie sich vor, Sie wären als studentische Hilfskraft verantwortlich für die Korrektur der folgenden Hausaufgabe:

Beweisen Sie für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ die Aussage:

$$a > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : a_n > 0\ \forall\, n \geq n_0.$$

Die folgenden vier Lösungen wurden bei Ihnen von (virtuellen) Studenten abgegeben.

1.


2. Wir betrachten zum Beispiel die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a + \frac{1}{n}$ Wenn man $n$ groß genug wählt, geht die Folge gegen 1. Deshalb ist $a_n > 0$ für $n > n_0$. Dies gilt auch für ein schwierigeres Beispiel mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Die Aussage gilt für $n_0 = 2$. Hieraus sieht man, dass die Aussage immer wahr ist.
3. Da $a > 0$ ist, können wir ein $\varepsilon > 0$ wählen, so dass $a - \varepsilon \geq 0$. Da die Folge $(a_n)$ konvergiert, existiert zu diesem $\varepsilon$ eine natürliche Zahl $n_0$, so dass der Betrag der Differenz zwischen $a$ und einem Element $a_n$ kleiner ist als $\varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n$, die größer sind als $n_0$. Für diese $n$ liegt somit die Differenz $a_n - a$ zwischen $\varepsilon$ und $\varepsilon$ und daher jedes Folgenglied $a_n$ zwischen $a - \varepsilon$ und $a + \varepsilon$. Wir haben jedoch schon festgestellt, dass $a - \varepsilon \geq 0$. Folglich gilt $a_n > 0$ für jedes Element $a_n$ mit $n > n_0$.
4. Da $a > 0$ ist, gilt im allgemeinen, dass es einen Abstand zwischen $a$ und Null gibt. Deshalb können wir einen $\varepsilon$-Schlauch legen, in dem ab $n_0$ alle Folgenglieder drin sind. Die Größe von $n$ spielt für alle, die drin sind, keine Rolle mehr.

Ihre Aufgabe: Bewerten und korrigieren Sie die vier Lösungen bezüglich der Kriterien *korrekte logische Schlußfolgerung* und *Klarheit der Formulierung*. Fertigen Sie außerdem eine Musterlösung an.

**2. Aufgabe** (konvergente Folgen, 4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Ist $a_n$ eine Nullfolge und gilt $|b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $b_n$ eine Nullfolge.

b) Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt $a_n + b_n \to a + b$.

c) Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

d) (Teilfolgen) Aus $a_{2n} \to a$ und $a_{2n+1} \to a$ folgt $a_n \to a$.

**3. Aufgabe** (Folgen, 4 Punkte)
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

a) $a_n = (-1)^n$

b) $b_n = \frac{2+1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}+5^{-n}}$

c) $c_n = \frac{r_0+r_1 n+...+r_k n^k}{s_0+s_1 n+...+s_k n^k}$ mit $r_i, s_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., k$ und $s_k \neq 0$

d) Die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1+\frac{x}{n}$ mit der Supremumsnorm $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$

**4. Aufgabe** (Beschränkte und monotone Folgen sind konvergent, 4 Punkte)
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Es gelte

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt, d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $x_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend, d.h. es gilt $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ....$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Was passiert, wenn man jeweils eine der beiden Bedingungen weglässt?