Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

6. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Abgabe bis Donnerstag, 30. Mai 2013, 16 Uhr

1. Aufgabe (Folge der Mittelwerte, 4 Punkte)
Es sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und

$$a_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

die Folge der Mittelwerte.

a) Zeigen Sie, dass die Mittelwerte (a_n) konvergieren, falls die (x_n) konvergieren. Wogegen nämlich?

b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt, d.h. es gibt eine Folge (x_n), so dass (a_n) konvergiert, (x_n) jedoch nicht.

c) Folgt aus der Konvergenz der (a_n), dass die Folge der (x_n) beschränkt ist?

2. Aufgabe (Häufungspunkte, 4 Punkte)
Für die gegebenen Folgen bestimme man alle Häufungspunkte sowie den Limes Superior und den Limes Inferior. Wieviele konvergente Teilfolgen gibt es jeweils?

a) $a_n = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, ...\right)$

b) $b_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, ...\right)$

3. Aufgabe (Konvergenz von Folgen, 4 Punkte)
Konstruieren Sie zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, um jede der folgenden Möglichkeiten zu realisieren:

a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$,

b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = c$ für eine gegebene Konstante $c \in \mathbb{R}$,

c) $(a_n \cdot b_n)$ ist beschränkt aber nicht konvergent.

4. Aufgabe (Cauchy-Folgen, 4 Punkte)
Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$|x_n - x_{n+1}| \leq q^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei $0 \leq q \leq 1$. Für welche q ist (x_n) eine Cauchy-Folge?

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für $0 < q < 1$ gilt.