Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

7. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Abgabe bis Donnerstag, 6. Juni 2013, 16 Uhr

1. Aufgabe (Vollständigkeit in Abhängigkeit der Metrik, 4 Punkte)
Überprüfen Sie den metrischen Raum (M, d) auf Vollständigkeit, wobei

a) $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y, \end{cases}$ (diskrete Metrik auf $\mathbb{R}$)

b) $M = \mathbb{Q}$, $d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y, \end{cases}$ (diskrete Metrik auf $\mathbb{Q}$)

c) $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

2. Aufgabe (Flitzi und Herr Meyer, 4 Punkte)
Flitzi, der Hund des Herrn Meyer, hat eine kleine Macke: Stets, wenn er mit Herrchen vom Spaziergang zurückkommt und die 400 m vom Haus entfernte Straßenecke erreicht, flitzt er auf direktem Weg bis zur Haustür vor, macht sofort kehrt und rennt zu Herrchen zurück. Herr Meyer legt in der Zwischenzeit jedesmal 25 Prozent der restlichen Entfernung zu seinem Haus zurück (Beispiel: Wenn Flitzi das erste Mal zurückkommt, hat Herr Meyer bereits 100 m geschafft). Bei Herrn Meyer angekommen, dreht Flitzi sofort wieder um, rennt im *Hundetempo* wieder zur Haustür, macht hier wieder kehrt usw. Flitzi eilt nun auf diese Weise zwischen Herrchen und Haus hin und her, bis Herr Meyer endlich bei der Haustür angelangt ist.

Welchen Gesamtweg hat Flitzi am Ende seiner Hin- und Her-Rennerei insgesamt zurückgelegt? Benutzen Sie zur Berechnung konvergente Reihen. Wie könnte man anschließend Schüler von der Richtigkeit der Berechnung überzeugen?

3. Aufgabe (Dreiecksungleichung für Reihen, 4 Punkte)
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei absolut konvergent, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ existiert. Zeigen Sie

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

4. Aufgabe (Umordnungen, 4 Punkte)
Es sei

$$a := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

die Summe der alternierenden harmonischen Reihe.

a) Zeigen Sie $a \geq \frac{1}{2}$.

b) Beweisen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Umordnung:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + + - - \ldots \ = a.$$