

## 8. Übung zur Vorlesung

# Analysis I

Sommersemester 2013

**Abgabe bis Donnerstag, 13. Juni 2013, 16 Uhr**

Achtung: Es gibt insgesamt vier Aufgaben.

### 1. Aufgabe (Reihenkonvergenz, 4 Punkte)

Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Den Grenzwert müssen Sie nicht berechnen.

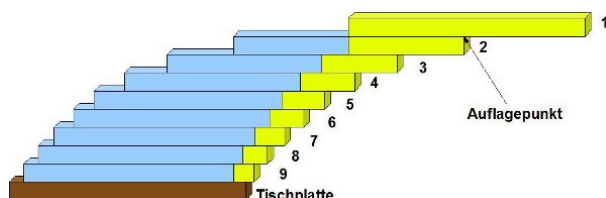
a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$

### 2. Aufgabe (Balkenstapel, 4 Punkte)

Gleichartige Holzbalken werden so gestapelt, dass der oberste möglichst weit über den untersten ragt, ohne dass der Stapel aus dem Gleichgewicht gerät und umkippt. Das klappt, wenn der oberste Balken (mit der Nummer 1) den darunterliegenden zur Hälfte überragt, während der zweite Balken den dritten zu  $\frac{1}{3}$  überragt und allgemein der  $n$ -te Balken den  $(n+1)$ -ten zu  $\frac{1}{n+1}$ , siehe Graphik.



- a) Geben Sie eine Formel für die Breite des Stapels in Abhängigkeit der Balkenlänge und der Anzahl der Balken an. Wie weit kann man den Stapel in die Breite bauen, wenn man unendlich viele Holzbalken zur Verfügung hat?
- b) Wie kann man diese Konstruktion verwenden, um Schülern den Begriff der Reihe nahezubringen? Welche Rolle spielt dabei die Konvergenz einer Reihe?

### 3. Aufgabe (Komposition stetiger Funktionen, 4 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Es seien  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $A, B \subset \mathbb{R}$  und  $f(A) = \{f(x) | x \in A\} \subset B$ . Dann ist auch die Komposition  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

**4. Aufgabe** (Stetigkeit, 4 Punkte)

Wo sind die folgenden Abbildungen stetig?

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ \frac{x}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$