Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

9. Übung zur Vorlesung

Analysis I

Sommersemester 2013

Abgabe bis Donnerstag, 20. Juni 2013, 16 Uhr

1. Aufgabe (Stetigkeit, 4 Punkte)

a) Eine Schülerin stellt fest: "Die durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definierte Funktion ist bei $x = 0$ unstetig." Was erwidern Sie?

b) Beantworten Sie folgende Frage eines Schülers: "Bedeutet die Stetigkeit einer Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dass man den Graphen von f ohne abzusetzen zeichnen kann, wobei Knicke erlaubt sind?" Stellen Sie dabei einen Bezug zur ε-δ-Definition von Stetigkeit her.

2. Aufgabe (Gleichmäßige Stetigkeit, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig sind, indem Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ jeweils ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x, y \in D$ aus $|x - y| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

a) $f(x) = 2x^2$, $D = [1, 2]$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{2}\}$

3. Aufgabe (Lipschitzstetigkeit, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist, die Umkehrung jedoch nicht gilt.

4. Aufgabe (Existenz von Fixpunkten, 4 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Es existiert ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.