Beispielaufgaben zum Thema Stetigkeit

8. Oktober 2013

Aufgabe 1 (Stetigkeit). *Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Lösung. Für $x \neq 0$ ist die Funktion als Verkettung elementarer stetiger Funktionen stetig. Um die Stetigkeit bei $x = 0$ zu zeigen, betrachten wir eine Nullfolge $(x_n)_n$, $x_n \in \mathbb{R}$; nach Definition der Folgenstetigkeit muss gelten, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(0) = 0\,.$$

Nun ist

$$\lim_{n\to\infty} |x_n^2 \cos(1/x_n)| \leq \lim_{n\to\infty} |x_n^2| = 0$$

wegen $|\cos(\cdot)| \leq 1$ und der Voraussetzung $x_n \to 0$. Also ist f stetig. $\square$

Aufgabe 2 (Gleichmäßige Stetigkeit I). *Zeigen Sie, dass die Sinusfunktion*

$$g(x) = \sin(x)$$

auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass die folgende Implikation gilt:

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Da die Sinusfunktion differenzierbar ist, folgt mit dem Mittelwertsatz, dass es ein $\xi \in]x, y[$ gibt, so dass

$$|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(\xi)||x - y| \leq |x - y|,$$

wobei wir o.B.d.A. $x < y$ angenommen haben. Ist also $\varepsilon > 0$ vorgegeben, müssen wir nur $\delta = \varepsilon$ setzen und sind fertig. □

Alternative Lösung. Die gleiche Abschätzung wie oben erhält man mit Hilfe eines Additionstheorems für den Sinus:

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(y)| &= 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq |x-y|, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Ungleichung $|\sin(x)| \leq |x|$ benutzt wurde. (Wer es nicht glaubt, zeichne die beiden Funktionen einfach mal hin.) □

Aufgabe 3 (Gleichmäßige Stetigkeit II). *Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2$$

nicht gleichmäßig stetig ist.

Lösung. Wir müssen ein $\varepsilon > 0$ finden, zu dem es kein "globales" $\delta > 0$ gibt, so dass die obige Implikation gilt. Wir müssen also zeigen, dass es für irgendein $\varepsilon > 0$ stets zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, für die zwar $|x - y| < \delta$ ist, aber $|x^2 - y^2| \geq \varepsilon$, egal wie klein δ gewählt wird.

Sei nun $y = x + \delta/2$ für irgendein $x > \delta$. Dann gilt

$$|x^2 - y^2| = \left|x\delta - \frac{\delta^2}{4}\right| \geq Cx\delta,$$

für eine geeignete Konstante $C \in]0, 1[$. (Auch bei dieser Abschätzung ist eine Zeichnung hilfreich.) Folglich ist für $x = \varepsilon/(C\delta)$ stets

$$|x^2 - y^2| \geq \varepsilon.$$

Und so lassen sich für jedes jedes noch so kleine $\delta > 0$ offenbar Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ finden, für die die Implikation oben nicht gilt. □

Aufgabe 4 (Lipschitz-Stetigkeit I). *Zeigen Sie, dass die Funktion*

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad h(x) = x^2$$

nicht Lipschitz-stetig ist.

Lösung. Zu zeigen ist, dass es eine Konstante $L < \infty$ gibt, so dass gilt:

$$|h(x) - h(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Nun ist nach der binomischen Formel

$$|x^2 - y^2| = |x + y||x - y|\,.$$

Da der Term $|x + y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig groß werden kann, existiert keine solche Konstante L, die Funktion ist folglich nicht Lipschitz-stetig. (Dass die Funktion h nicht Lipschitz-stetig ist, folgt übrigens schon aus der Tatsache, dass sie nicht gleichmäßig stetig ist.) □

Aufgabe 5 (Lipschitz-Stetigkeit II). *Zeigen Sie, dass die Sinusfunktion*

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g(x) = \sin(x)$$

global (d.h. auf dem gesamten Definitionsbereich) Lipschitz-stetig ist.

Lösung. Es reicht zu zeigen ist, dass die Ableitung der Funktion g beschränkt ist, denn Lipschitz-Stetigkeit bedeutet gerade, dass

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leq L \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

für $L < \infty$. Nun folgt aber aus dem Mittelwertsatz, dass

$$\frac{|\sin(x) - \sin(y)|}{|x - y|} = |\cos(\xi)| \leq 1$$

für ein $\xi \in]x, y[$, und damit ist die Lipschitz-Stetigkeit gezeigt. (Damit ist die Funktion automatisch gleichmäßig stetig.) □