Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

1. Übung zur Vorlesung

Teilraumkorrekturmethoden

SoSe 2013

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethoden.php`

Abgabe: Di., 30.04.2013, in der Übung — Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Werden bei Programmieraufgaben Testläufe gefordert, protokollieren Sie diese mit dem `matlab`-Befehl `diary`. **Legen Sie ferner ein Programm bei, daß alle geforderten Testläufe ausführt und ohne Angabe von Argumenten gestartet werden kann.**
Alle Programmieraufgaben und Protokolle müssen pünktlich per E-Mail als Anhang abgegeben werden. Die Betreff/Subject-Zeile muss dabei **immer** mit dem Text `[SSC13]` beginnen. Aus dem Text der E-Mail muss hervorgehen, wer an der Bearbeitung der Aufgaben mitgewirkt hat.

1. Aufgabe (1+3 TP)
Es sei eine symmetrisch, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Mit der Zerlegung $A = D + L + R$ von A in Diagonale, linkes unteres Dreieck und rechtes oberes Dreieck ist das Gauß-Seidel-Verfahren gegeben durch

$$(D + L)x^{\nu+1} + Rx^{\nu} = b.$$

a) Zeigen Sie, daßdas Gauß-Seidel-Verfahren sich wie folgt in Korrekturform schreiben läßt

$$x^{\nu+1} = x^{\nu} + (D + L)^{-1}(b - Ax^{\nu}).$$

b) Zeigen Sie, daßsich das Gauß-Seidel-Verfahren als sequenzielles Teilraumkorrekturverfahren für die Teilräume $V^k = \operatorname{span}\{e^i\}$ mit den euklidischen Basisvektoren $e^i \in \mathbb{R}^n$ schreiben läßt. D.h. es gilt

$$\begin{aligned} w^{\nu,0} &= x^{\nu}, \\ w^{\nu,k} &= w^{\nu,k-1} + \operatorname{argmin}_{v\in V^k} J(w^{\nu,k-1} + v), \qquad k = 1, \dots, n \\ x^{\nu+1} &= w^{\nu,n}, \end{aligned}$$

für das Energiefunktional

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

2. Aufgabe (4 PP)
Diskretisieren Sie das Problem

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit $\Omega = (0,1)$ und $f = 1$ mit linearen Finiten Elementen auf einem uniformen Gitter. Wenden Sie nun das Gauß-Seidel Verfahren und das gedämpfte Jacobi Verfahren für verschiedene Dämpfungsparameter $\omega \in (0,2)$ auf das entstehende lineare Gleichungssystem

$$A_j \underline{u}_j = b_j$$

an. Plotten Sie jeweils für die Iterierten u_j^ν mit $\nu < 10$ den algebraischen Fehler $u_j^\nu - u_j$ bei einem zufälligen Startwert u_j^0. Was beobachten Sie ?

3. Aufgabe (4 TP)
Das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren für die Lösung von $Ax = b$ mit symmetrisch, positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erhält man durch Anwendung eines normalen Gauß-Seidel Schritts gefolgt von einem Gauß-Seidel Schritt, der die Komponenten in umgekehrter Reihenfolge behandelt. Zeigen Sie, daß sich das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren als

$$x^{\nu+1} = x^\nu + B^{-1}(b - Ax^\nu)$$

mit einer symmetrisch, positiv definiten Matrix B schreiben läßt und geben Sie B an.