Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

2. Übung zur Vorlesung

Teilraumkorrekturmethoden

SoSe 2013

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethoden.php

Abgabe: Di., 07.05.2013, in der Übung

1. Aufgabe (6 TP)
Zeigen Sie, dass alle symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar sind und eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A existiert. Sie dürfen dazu die jordansche Normalform bzw. eine Hauptraumzerlegung von A verwenden. Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A über $\mathbb{C}$ zerfällt.

b) Zeigen Sie, dass jeder Hauptvektor von A ein Eigenvektor ist, d.h. $(A-\lambda I)^k v = 0 \Rightarrow (A-\lambda I)v = 0$.

c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.

d) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.

2. Aufgabe (4 TP)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch bezüglich $\langle \cdot,\cdot\rangle_A = \langle A\cdot,\cdot\rangle$. Zeigen Sie, dass die induzierte Operatornorm

$$\|M\|_A = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Mv\|_A}{\|v\|_A}$$

von M durch $\|M\|_A = |\lambda^{\pm}_{max}(M)|$ gegeben ist, wobei $\lambda^{\pm}_{max}(M)$ der betragsmäßig größte Eigenwert von M ist.

3. Aufgabe (2 TP)
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Ferner gelte

$$\max_{v\neq 0} \frac{|\langle A(I-B^{-1}A)v,v\rangle|}{\langle Av,v\rangle} = \max_{v\neq 0} \frac{|\langle (A-AB^{-1}A)v,v\rangle|}{\langle Av,v\rangle} = \rho < 1.$$

Zeigen Sie, dass dann das lineare Iterationsverfahren

$$U^{\nu+1} = U^\nu + B^{-1}(b - AU^\nu)$$

in der Energienorm $\|\cdot\|_A$ mit der Rate ρ gegen die Lösung U von $AU = b$ konvergiert.