Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

3. Übung zur Vorlesung

Teilraumkorrekturmethoden

SoSe 2013

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethoden.php

Abgabe: Di., 14.05.2013, in der Übung

1. Aufgabe (8 TP)
Das CG-Verfahren zur iterativen Lösung von $Au = b$ für symmetrisch, positiv definites $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem Startwert $u^0 \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$u^{\nu+1} = u^\nu + \operatorname*{arg\,min}_{v\in V^\nu} J(u^\nu + v), \qquad J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle$$

mit den Krylow-Räumen

$$V^\nu = \operatorname{span}\{r^0, \dots, r^\nu\}, \qquad r^\nu = b - Au^\nu.$$

Zeigen Sie, dass sich das CG-Verfahren äquivalent in folgender Form schreiben lässt:

$$\begin{aligned} v^0 &= r^0, \\ v^\nu &= r^\nu + \frac{\langle r^\nu, r^\nu\rangle}{\langle r^{\nu-1}, r^{\nu-1}\rangle} v^{n-1}, \qquad \nu > 0, \\ u^{\nu+1} &= u^\nu + \frac{\langle r^\nu, r^\nu\rangle}{\langle Av^\nu, v^\nu\rangle} v^\nu \end{aligned}$$

Hinweis: Gehen Sie dazu wie folgt vor

- Zeigen Sie $V^\nu = \operatorname{span}\{r^0, Ar^0, \dots, A^\nu r^0\}$.
- Zeigen Sie, dass $w^0, \dots, w^\nu$ mit $w^0 = r^0$ und $w^\nu = r^\nu - \frac{\langle Ar^\nu, w^{\nu-1}\rangle}{\langle Aw^{\nu-1}, w^{\nu-1}\rangle} v^{n-1}$ eine A-orthogonale Basis von V^ν bilden.
- Zeigen Sie $u^{\nu+1} = u^\nu + \frac{\langle r^\nu, w^\nu\rangle}{\langle Aw^\nu, w^\nu\rangle} w^\nu$.
- Zeigen Sie $v^\nu = w^\nu$.

2. Aufgabe (4 TP)
Das mit B vorkonditionierte CG-Verfahren zur iterativen Lösung von $Au = b$ für symmetrisch, positiv definite $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erhält man durch Anwendung des CG-Verfahrens auf das transformierte System $(AB^-1)u_B = b$ unter Verwendung des Skalarprodukts $\langle B^{-1}\cdot, \cdot\rangle$. Zeigen Sie, dass das Verfahren äquivalent zur Anwendung des normalen CG-Verfahren mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle$ auf das symmetrisch vorkonditionierte System $(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}) u_{B^{\frac{1}{2}}} = B^{-\frac{1}{2}} b$ ist.