Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

4. Übung zur Vorlesung

Teilraumkorrekturmethoden

SoSe 2013

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethoden.php

Abgabe: Di., 28.05.2013, in der Übung

1. Aufgabe (2 TP)
Zeigen Sie, daß der symmetrische Gauß-Seidel-Vorkonditionierer

$$B = (D + L)D^{-1}(D + L)^T$$

für symmetrisch positiv definites $A = D + L + L^T$ die Glättungsbedingung

$$\langle Ax, x\rangle \leq \omega_0 \langle Bx, x\rangle \qquad \forall x$$

mit $\omega_0 = 1$ erfüllt.

2. Aufgabe (4 TP)
Der symmetrisch positiv definite Vorkonditionierer B erfülle die Glättungsbedingung

$$\langle Ax, x\rangle \leq \omega_0 \langle Bx, x\rangle \qquad \forall x.$$

a) Zeigen Sie, daß dies die Abschätzung

$$\lambda_{\max}(B^{-1}A) \leq \omega_0$$

impliziert.

b) Zeigen Sie, daß aus der Glättungseigenschaft mit $\omega_0 < 2$ die Konvergenz der linearen Iteration

$$u^{\nu+1} = u^\nu + B^{-1}(b - Au^\nu)$$

gegen die Lösung u von $Au = b$ folgt.

3. Aufgabe (6 TP)
Es seien A, B s.p.d. mit $\|I - B^{-1}A\|_A = \rho < 1$.

a) Zeigen Sie für $\omega_0 = 1 + \rho$ die Glättungseigenschaft

$$\langle Ax, x\rangle \leq \omega_0 \langle Bx, x\rangle \qquad \forall x.$$

b) Zeigen Sie

$$\kappa(B^{-1}A) \leq \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

c) Zeigen Sie, daß die Anwendung von zwei Schritten des linearen Iterationsverfahrens

$$u^{\nu+1} = u^{\nu} + B^{-1}(b - Au^{\nu})$$

einen symmetrisch positiv definiten Vorkonditionierer induziert. D.h. es existiert $\tilde{B}$ s.p.d., mit

$$u^{\nu+2} = u^{\nu} + \tilde{B}^{-1}(b - Au^{\nu}).$$