Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

5. Übung zur Vorlesung

Teilraumkorrekturmethoden

SoSe 2013

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethoden.php

Abgabe: Di., 04.06.2013, in der Übung

1. Aufgabe (10 TP)
Es sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrisch und elliptisch, $l \in V'$ und $A : V \to V'$ mit $Av = a(v, \cdot)$. Betrachte das sequenzielle Teilraumkorrekturverfahren

$$u^{\nu+1} - u = \underbrace{(I - B_m^{-1}A) \dots (I - B_0^{-1}A)}_{=E}(u^\nu - u)$$

für eine Zerlegung $V = V_0 + \cdots + V_m$ von V in Unterräume und lineare, stetige, invertierbare Vorkonditionierer $B : V_k \to V_k'$. Es gelte $\|E\|_A = \rho < 1$.

a) Zeigen Sie, dass sich das Verfahren darstellen lässt als

$$u^{\nu+1} - u = (I - MA)(u^\nu - u).$$

b) Zeigen Sie, dass M invertierbar ist. (In folgenden sei $B = M^{-1}$.)

c) Folgern Sie aus $\|E\|_A = \rho < 1$ die Abschätzung

$$\langle Av, v\rangle < 2\langle Bv, v\rangle.$$

d) Zeigen Sie, dass sich das symmetrisierte Verfahren

$$u^{\nu+1} - u = (I - B_0^{-T}A) \dots (I - B_m^{-T}A)(I - B_m^{-1}A) \dots (I - B_0^{-1}A)(u^\nu - u)$$

mit einem symmetrischem $\tilde{M}$ darstellen lässt als

$$\begin{aligned} u^{\nu+1} - u &= (I - B^{-T}A)(I - B^{-1}A)(u^\nu - u) \\ &= (I - \tilde{M}A)(u^\nu - u). \end{aligned}$$

e) Zeigen Sie, dass $\tilde{M}$ invertierbar und $\tilde{B} = M^{-1}$ symmetrisch und positiv definit ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Zeigen Sie, daß die diskrete L^2-Norm

$$|v|_0^2 = \tfrac{1}{6} \textstyle\sum_{t \in \mathcal{T}_j} (v(p_{1,t})^2 + v(p_{2,t})^2 + v(p_{2,t})^2)|t|$$

der Abschätzung

$$\tfrac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \le |v|_0^2 \le 2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in S_j$$

genügt.