Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

7. Übung zur Vorlesung

Teilraumkorrekturmethoden

SoSe 2013

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethoden.php

Abgabe: Di., 18.06.2013, in der Übung

1. Aufgabe (8 TP)
Die Gitterfolge $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_j$ sei durch sukzessive Verfeinerung entstanden. Es seien $\mathcal{N}_k$ und S_k die Knotenmenge und der Raum der linearen finiten Elemente auf $\mathcal{T}_k$ und $(\lambda_p^k)_{p\in\mathcal{N}_k}$ die Knotenbasis des von S_k.

a) Es sei $I_k : S_j \to S_k$ der lineare Interpolationsoperator. Die Operatoren $P_k : S_j \to S_k$ seien gegeben durch $P_0 = I_0$ und $P_k = I_k - I_{k-1}$ für $k > 0$. Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{j} P_k = I$ und $\operatorname{Bild} P_k = V_k$ mit

$$V_k := \operatorname{span}\{\lambda_p^k : p \in \mathcal{N}_k \setminus \mathcal{N}_{k-1}\} \subset S_k \quad \forall k > 0, \qquad V_0 = S_0.$$

b) Die Anwendung des parallelen Teilraumkorrekturverfahrens zur Zerlegung $S_j = V_0 + \cdots + V_j$ mit Jacobi-Glätter liefert den Hierarchische-Basen(HB)-Vorkonditionierer. Zeigen Sie, daß die Anwendung des HB-Vorkonditionierers äquivalent zur Anwendung eines Jacobi-Schrittes auf das in die hierarchische Basis transformierte lineare Gleichungssystem ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, ein Gitter auf dem Interval $[a, b]$, mit n einer Zweierpotenz. Betrachten Sie die Basisfunktionen ψ_i, $0 < i < n$, der hierarchischen Basis für den Raum

$$S_0^1 = \{v \in C([a, b]) \mid v_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ ist linear, } x_0 = 0, x_n = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen ψ_i paarweise orthogonal bezüglich der Bilinearform

$$a(v, w) = \int_{[a,b]} \nabla v \nabla w \, dx$$

sind.