

Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

8. Übung zur Vorlesung

TEILRAUMKORREKTURMETHODEN

SoSe 2013

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethode.php

Abgabe: Di., 25.06.2013, in der Übung

1. Aufgabe (8 PP)

Implementieren Sie ein multiplikatives Mehrgitterverfahren mit symmetrischem Gauß-Seidel-Glätter wie folgt in Matlab:

- a) Schreiben Sie eine rekursive Matlab-Funktion `x=mgstep(r,k,A,T,pre, post)` die einen V-Zyklus mit symmetrischem Gauß-Seidel-Glätter auf Level k von j implementiert. Dabei sei
 - k der Level, auf dem der V-Zyklus beginnen soll,
 - r das aktuelle Residuum,
 - A ein Cell-Array mit den $j + 1$ (dünnen) Grobgittermatrizen für alle Level
 - T ein Cell-Array mit allen j (dünnen) Transferoperatoren,
 - `pre` und `post` die Anzahl an Vor- und Nachglättungsschritten,
 - x die Gesamtkorrektur des V-Zyklus.
- b) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `x=mgsolve(A,b,x0,tol,T,pre, post)` die das lineare Gleichungssystem $Ax=b$ unter Verwendung von `mgstep` iterativ löst. Dabei sei
 - A die (dünne) Systemmatrix,
 - b die rechte Seite,
 - x_0 die Startiterierte,
 - `tol` die Toleranz für das Abbruchkriterium $\|x^{\nu+1} - x^\nu\|_A \leq \text{tol}$,
 - T , `pre`, `post` wie oben.
- c) Testen Sie Ihr Programm mit der Poisson-Gleichung $-u'' = 1$ auf dem Intervall $[0, 1]$ mit homogenen Dirichlet-Randwerten und Startwert $u_0 = 0$. Die Gitterhierarchie sei durch j -faches Verfeinern des Startgitters $\{0, 0.5, 1\}$ gegeben. Plotten Sie die gemittelte Konvergenzrate für die Toleranz `tol` = 10^{-10} über h_j für $j = 0, \dots, 15$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem reinen symmetrischen Gauß-Seidel-Verfahren.

2. Aufgabe (4 TP)

Es sei $Q_k : S_j \rightarrow S_k$ die L^2 -Projektion. Zeigen Sie, daß

$$\|(Q_k - Q_{k-1})v\|_0^2 \leq c4^{-k}|Q_kv|_1^2 \quad \forall v \in S_j$$

mit einer Konstante c , die nur vom Ausgangsgitter \mathcal{T}_0 abhängt, gilt. Verfahren Sie dazu analog zum Beweis der Abschätzung für die Interpolation.