Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

9. Übung zur Vorlesung

Teilraumkorrekturmethoden

SoSe 2013

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethoden.php

Abgabe: Di., 02.07.2013, in der Übung

1. Aufgabe (6 TP)
Es sei $S_0 \subset \cdots \subset S_j$ eine durch Verfeinerung entstandene geschachtelte Folge linearer FE-Räume.

$$S_j^2 = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0,\, v|_\tau \in P^2(\tau)\, \forall \tau \in \mathcal{T}_j\}$$

sei der Raum quadratischen Finiten Elemente auf $\mathcal{T}_j$. Gegeben sei die hierarchische Zerlegung

$$V_k = S_k, \quad k = 0, \ldots, j, \qquad V_{j+1} = \{v \in S_j^2 : v(p) = 0 \forall p \in N_j\}.$$

Beweisen Sie (analog zum Fall linearer Finiter Elemente) eine Abschätzung der Kondition $\kappa(B^{-1}A)$ für den Vorkonditionierer B der durch die parallele Teilraumkorrektur mit obiger Zerlegung und Jacobi-Glätter gegeben ist. (Hinweis: Zeigen Sie (V0), (V1), (V2)'.)

2. Aufgabe (6 TP)
Sei V ein reflexiver Banachraum, $J_0 : V \to \mathbb{R}$ konvex und Gâteaux-differenzierbar, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ konvex und $K \subset V$ konvex. Zeigen Sie, daß das Minimierungsproblem

$$u \in K : \qquad J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in K$$

mit $J = J_0 + \varphi$ equivalent zur Variationsungleichung

$$u \in K : \qquad \langle J_0'(u), v - u\rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0 \qquad \forall v \in K$$

ist. Was ergibt sich, wenn $J = \frac{1}{2}a(\cdot,\cdot) - l(\cdot)$ ein quadratisches Funktional ist ? Hinweis: Betrachten Sie $\tilde{v} = (1-\lambda)u + \lambda v$. Zeigen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R})$

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Aufgabe (4 Zusatz-TP + 10 Zusatz-PP)
Betrachten Sie die Variationsgleichung

$$u \in H_0^1(\Omega) \qquad a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

mit einer H_0^1-elliptischen symmetrischen Bilinearform a, $l \in (H_0^1(\Omega))'$ sowie die Finite-Elemente-Lösungen $u_\mathcal{S} \in S^{(1)}$ und $u_\mathcal{Q} \in S^{(2)}$. Nehmen Sie an, daß die Saturationsbedingung

$$\exists \beta \in (0,1) \quad : \quad \|u - u_\mathcal{Q}\|_a \leq \beta \|u - u_\mathcal{S}\|_a \tag{1}$$

erfüllt ist.

a) Zeigen Sie, daß folgende Abschätzung des Diskretisierungsfehlers gilt:

$$\sqrt{1-\beta^2}\|u - u_\mathcal{S}\|_a \leq \|u_\mathcal{S} - u_\mathcal{Q}\|_a \leq \|u - u_\mathcal{S}\|_a.$$

b) Geben Sie Ω, ein Gitter, a und f an, so daß (1) nicht erfüllt ist.

c) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `A = assemble_P2(grid, local_assem, Q)`, das mit den entsprechenden lokalen Assemblern und Quadraturformeln die Steifigkeitsmatrix und die Massenmatrix für quadratische finite Elemente assembliert. Beachten Sie, daß auch Kantenfreiheitsgrade auftauchen.

d) Verwenden Sie Ihr Programm und die Programme von der Vorlesungshomepage, um für uniforme Gitter $\mathcal{T}_h$ auf $\Omega = (0,1)^2$ mit verschiedenen h den Fehlerschätzer $\|u_\mathcal{S} - u_\mathcal{Q}\|_a$ für die Lösung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{für } |x - (0.5, 0.5)| \leq 0.2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

zu berechnen. Verwenden Sie dazu die hierarchische P^2-Basis und <u>nicht</u> die Lagrange-Basis. Plotten Sie den Fehler $\|u_\mathcal{S} - u_\mathcal{Q}\|_a$ über h in einer geeigneten Skala und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse vor dem Hintergrund der a-priori Abschätzungen aus der Vorlesung.

e) Definieren Sie die Bilinearform

$$b(u,v) = \sum_{e \in \mathcal{E}} u_{p_e} v_{p_e} a(\lambda_{p_e}, \lambda_{p_e})$$

auf dem Raum $\mathcal{W} = \text{span}\{\lambda_{p_e} : e \in \mathcal{E}\}$, wobei $\mathcal{E}$ die Menge der inneren Kanten und λ_{p_e} die zum Kantenmittelpunkt p_e von $e \in \mathcal{E}$ gehörende P^2-Basisfunktion ist. Warum lässt sich $\tilde{u}_\mathcal{Q} = u_\mathcal{S} + e_b$ mit

$$e_b \in \mathcal{W} \quad : \quad b(e_b, v) = l(v) - a(u_\mathcal{S}, v) \quad \forall v \in \mathcal{W}$$

als inexakte Auswertung von $u_\mathcal{Q}$ interpretieren? Verwenden Sie Ihr Programm, um analog zu Teil d) den den Fehlerschätzer $\|u_\mathcal{S} - u_\mathcal{Q}\|_a$ zu berechnen. Plotten Sie den Fehler wie in Teil d). Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse.