Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser,

10. Übung zur Vorlesung

Teilraumkorrekturmethoden

SoSe 2013

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2013/Vorlesungen/Teilraumkorrekturmethoden.php

Abgabe: Di., 09.07.2013, in der Übung

1. Aufgabe (4 TP)
Für die iterative Lösung der Variationsgleichung

$$u \in H : \qquad a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in H$$

mit $l \in H'$ und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ s.p.d. betrachte sequenzielle Teilraumkorrekturmethode

$$\begin{aligned}
&w_{-1} := u^\nu \\
&\text{Für } k = 0, \dots, m \\
&\qquad v_k \in V_k : \qquad b_k(v_k, v) = l(v) - a(w_{k-1}, v) \qquad \forall v \in V_k \\
&\qquad w_k := w_{k-1} + v_k \\
&u^{\nu+1} := w_m
\end{aligned}$$

zu einer Zerlegung $H = V_0 + \cdots + V_m$ in Unterräume V_k mit s.p.d. Bilinearformen $b_k : V_k \times V_k \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Glättungsbedingung mit $\omega_0 < 2$ die Energiemonotonie des Verfahrens impliziert. D.h. für das assoziierte Enregiefunktional J gilt $J(w_k) \leq J(w_{k-1})$ für $k = 0, \dots, m$ mit '$<$' falls $w_{k-1} \neq u$.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine s.p.d. Matrix und $b, \underline{\psi}, \overline{\psi} \in \mathbb{R}^n$ mit $\underline{\psi} < \overline{\psi}$. Zeigen Sie, daß das durch sukzessive Minimierung gegebene nichtlineare Gauß-Seidel Verfahren für das Minimierungsproblem

$$u \in K : \qquad J(u) \leq J(v) \qquad \forall v \in K$$

mit

$$J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle, \qquad K = \{v \in \mathbb{R}^n : \underline{\psi} \leq v \leq \overline{\psi}\}$$

äquivalent zur Iteration $u^{k+1} = u^k + v^k$ mit

$$v^k \in K - u^k : \qquad \langle (D+L)v^k, v - v^k\rangle \geq \langle b - Au^k, v - v^k\rangle \qquad \forall v \in K - u^k$$

ist. Dabei ist $A = D + L + R$ eine Zerlegung von A in diagonalen, linken und rechten Anteil.

3. Aufgabe (6 Zusatz-TP)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ s.p.d., $b, \psi \in \mathbb{R}^n$, $K = \{v \in \mathbb{R}^n : \psi \leq v\}$, $I_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die Indikatorfunktion von K und $A = D + L + R$ eine Zerlegung von A in diagonalen, linken und rechten Anteil. Das nichtlineare Gauß-Seidel Verfahren für das Minimierungsproblem

$$u \in K : \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K, \qquad J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle, \tag{1}$$

ist gegeben durch $\mathcal{M}(v) = (D + L + \partial I_K)^{-1}(b - Rv)$.

a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{M}$ Lipschitz-stetig ist.

b) Zeigen Sie, daß die Iteration u^ν mit

$$u^{\nu+\frac{1}{2}} = \mathcal{M}(u^\nu), \qquad u^{\nu+1} = \mathcal{C}(u^{\nu+\frac{1}{2}})$$

für jedes $u^0 \in K$ gegen die Lösung u von (1) konvergiert, falls $\mathcal{C}(v) \in K$ und $J(\mathcal{C}(v)) \leq J(v)$ für alle $v \in K$ gilt.

c) Zeigen Sie, daß die multilevel Relaxation für (1) mit normale und abgeschnittenen Grobgitterbasisfunktionen konvergiert.