Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Dipl. Math. Hanne Hardering

1. Übung zur Vorlesung

Analysis 2 (lehramtsbezogen)

SoSe 2014

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2014/Vorlesungen/AnalysisII_LA.php

Abgabe: Di., 29.04.2014, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen zu je zwei Studenten bearbeitet und abgegeben werden. Bitte achten Sie darauf, dass die Namen **aller** Beteiligten auf dem abgegebenen Lösungen vermerkt sind. Die Lösungen sind rechtzeitig in das Fach des Tutors in der Arnimallee 3 abzugeben.

1. Aufgabe (2 P)
Sei X ein normierter Raum mit allgemeiner Norm $\|\cdot\|$. Beweisen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\|x-y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

2. Aufgabe (4 P)
Betrachten Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{natürliche Metrik:} \quad d_1(x,y) := |x-y|,$$
$$\text{diskrete Metrik:} \quad d_2(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass alle bzgl. d_2 konvergenten Folgen auch bzgl. d_1 konvergieren, aber nicht umgekehrt (Hinweis: Charakterisieren Sie dazu die bzgl. d_2 konvergenten Folgen).

b) Ist $\mathbb{R}$ mit $\|\cdot\|_i := d_i(\cdot, 0)$, $i = 1, 2$, ein normierter Vektorraum?

3. Aufgabe (6 P)
Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $d' : M \times M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d'(x,y) := \min\{d(x,y), 1\}.$$

Zeigen Sie:

a) (M, d') ist ein metrischer Raum.

b) $U \subset M$ ist genau dann offen bezüglich d, wenn U offen bezüglich d' ist.