Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Dipl. Math. Hanne Hardering

10. Übung zur Vorlesung

Analysis 2 (lehramtsbezogen)

SoSe 2014

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2014/Vorlesungen/AnalysisII_LA.php`

Abgabe: Di., 08.07.2014, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P)
Konstruieren Sie ein iteratives Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{z}$ für $z \in \mathbb{R}^+$. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Konstruieren Sie eine geeignete Funktion $f_z : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f_z(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{z}$. Zeigen Sie, daß das Newton-Verfahren für $|x_0 - \sqrt{z}|$ klein genug gegen $\sqrt{z}$ konvergiert und diskutieren Sie den Konvergenzradius.

2. Aufgabe (4 P)
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extrema und Sattelpunkte:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

3. Aufgabe (4 P)
Untersuchen Sie folgende Funktion auf Extrema:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 35x - 47y + \frac{1}{32}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\cos(x+y). \end{aligned}$$

Hinweis: Wenn Nullstellen des Gradienten nicht explizit berechnet werden können, nutzen Sie Ihr Wissen über konvexe Funktionen.

4. Aufgabe (4 P)
Sie stellen im Unterricht das Newton-Verfahren für eine stetig differenzierbare Funktion f mit Nullstelle α und $f'(\alpha) \neq 0$ vor. Ein Schüler ist nicht von der lokalen Konvergenz des Newton-Verfahrens überzeugt und nennt Ihnen ein Beispiel:
"Ich suche die Nullstelle von $\sin x$ für $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$ (s. Abb.). Die Funktion ist dort lokal punktsymmetrisch und die Nullstelle ist auch ein Wendepunkt. Aus Symmetriegründen muss das Verfahren hin und her springen, ohne sich aber der Nullstelle zu nähern, egal wie dicht man an der Nullstelle startet."
Wo liegt der Denkfehler?