Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Dipl. Math. Hanne Hardering

2. Übung zur Vorlesung

Analysis 2 (lehramtsbezogen)

SoSe 2014

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2014/Vorlesungen/AnalysisII_LA.php

Abgabe: Di., 06.05.2014, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P)
Sei (M,d) ein metrischer Raum, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $a \in M$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- $a_n \to a$, wenn $n \to \infty$.
- $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ d(a_n, a) \leq \epsilon$.
- $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ d(a_n, a) \leq \frac{1}{k}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ d(a_n, a) < \frac{1}{k}$.
- $\forall U \subseteq M,\ U$ Umgebung von $a\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ a_n \in U$.
- $\forall O \subseteq M,\ O$ offen, $a \in O\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ a_n \in O$.

2. Aufgabe (4 P)
Sei (M,d) ein metrischer Raum und d' eine weitere Metrik auf M mit

$$d'(x,y) \leq d(x,y) \qquad \forall x, y \in M.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) Wenn $O \subseteq M$ offen bezüglich d' ist, so ist O auch offen bezüglich d.

b) Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M bezüglich d gegen ein $a \in M$ konvergiert, so konvergiert sie auch bezüglich d' gegen a.

3. Aufgabe (4 P)
Wir betrachten $\mathbb{R}^d$ mit der Euklidischen Norm definiert durch

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{d} (x^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für $x = (x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d$.
Zeigen Sie: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}^d$, wenn sie komponentenweise konvergiert, d.h., wenn $a_n^k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a^k \in \mathbb{R}$ für alle $k = 1, \ldots, d$.

4. Aufgabe (4 P)
Sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass offene Mengen folgende Eigenschaften besitzen:

a) Der Durchschnitt zweier offenen Mengen ist offen, d.h., sind $O_1, O_2 \subseteq M$ offen, so ist $O_1 \cap O_2$ offen.

b) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen, d.h., ist $(O_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von M mit beliebiger Indexmenge I, so ist $\bigcup_{i\in I} O_i$ eine offene Menge.