Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Dipl. Math. Hanne Hardering

3. Übung zur Vorlesung

Analysis 2 (lehramtsbezogen)

SoSe 2014

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2014/Vorlesungen/AnalysisII_LA.php

Abgabe: Di., 20.05.2014, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P + 2 Bonus)
Finden Sie jeweils eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften oder zeigen Sie, dass es keine solchen Mengen gibt.

a) $\text{int}(U) = U$ und $\overline{U} \neq U$

b) $\text{int}(U) \neq U$ und $\overline{U} = U$

c) $\text{int}(U) \neq U$ und $\overline{U} \neq U$

d) $\text{int}(U) = U$ und $\overline{U} = U$

e) $\text{int}(\overline{U}) = \text{int}\, U$

f) $\text{int}(\overline{U}) \neq \text{int}\, U$

g) $\overline{\text{int}(U)} = \overline{U}$

h) $\overline{\text{int}(U)} \neq \overline{U}$

Zusatzaufgabe : Finden Sie eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\text{int}(U) = \emptyset$ und $\overline{U} = \mathbb{R}^2$ und beweisen Sie, dass sie diese Eigenschaften tatsächlich hat.

2. Aufgabe (4 P)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Der metrische Raum $([0,1]^2, d)$ mit $d(x,y) = \|x-y\|_\infty$ ist vollständig.

b) Der metrische Raum $((0,1)^2, d)$ mit $d(x,y) = \|x-y\|_\infty$ ist vollständig.

c) Es gibt eine Metrik auf $[0,1]^2$, sodass *keine* Cauchy-Folge konvergiert.

d) Es gibt eine Metrik auf $(0,1)^2$, sodass *keine* Cauchy-Folge konvergiert.

3. Aufgabe (4 P)
Sei $M = (0,1]$ und $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$. Zeigen Sie:

a) (M,d) ist ein metrischer Raum.

b) (M,d) ist vollständig.

4. Aufgabe (4 P)
Erklären Sie das Konzept einer Metrik anschaulich für Schüler. Gehen Sie dabei sowohl auf die Axiome ein, als auch auf Beispiele im Alltag. Wo befinden sich Schnittstellen zu Lehrinhalten in der Schulmathematik?