Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Dipl. Math. Hanne Hardering

4. Übung zur Vorlesung

Analysis 2 (lehramtsbezogen)

SoSe 2014

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2014/Vorlesungen/AnalysisII_LA.php`

Abgabe: Di., 27.05.2014, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (1+3 P)

a) Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen von einem metrischen Raum X in die reellen Zahlen. Sei weiter $\phi : X \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

definiert. Zeigen Sie, dass ϕ stetig ist.

b) Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^r \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Beweisen Sie für $r = 0, \frac{1}{2}, 1$ jeweils, ob f stetig ist oder nicht.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

2. Aufgabe (2+2 P)
Beweisen Sie:

a) Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen ihr Supremum, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

b) Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen ihr Infimum, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

3. Aufgabe (4 P)
Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann ist f genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen in Y abgeschlossen in X sind, d.h.

$$f \text{ stetig } \Leftrightarrow \big(A \subset Y \text{ abg. } \Rightarrow f^{-1}(A) \subset X \text{ abg.}\big).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $X \backslash f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \backslash A)$.

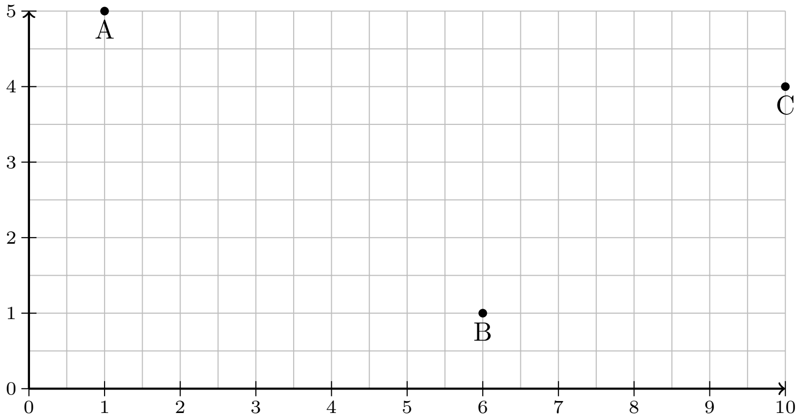
4. Aufgabe (4 P)
Folgende Aufgabe wird im Unterricht gestellt:

Bestimme rechnerisch den Abstand

a) von A nach B

b) von B nach C

c) von A nach C



Ein Schüler rechnet und kommt auf folgende Lösungen:

a) 9

b) 7

c) 10

Was hat der Schüler gemacht? Begründen Sie: Hat der Schüler mit einem sinnvollen Abstandsbegriff gearbeitet?