Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Dipl. Math. Hanne Hardering

6. Übung zur Vorlesung

Analysis 2 (lehramtsbezogen)

SoSe 2014

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2014/Vorlesungen/AnalysisII_LA.php

Abgabe: Di., 10.06.2014, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P)
Satz: Sei M eine Menge und $f_n : M \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn zusätzlich M kompakt ist, $(f_n)_n$ monoton wachsend ist, d.h. $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in M$, und f stetig ist, so konvergiert $(f_n)_n$ auch gleichmäßig gegen f, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

Dies gilt auch, wenn $(f_n)_n$ monoton fallend statt wachsend ist.
Zeigen Sie, dass der Satz (Satz von Dini) jeweils ohne die folgende Voraussetzung nicht anwendbar ist:

a) Stetigkeit von f

b) Monotonie der $(f_n)_n$

c) Kompaktheit von M

Finden Sie dazu Gegenbeispiele.

2. Aufgabe (4 P)
Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf kompaktem $K \subset \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf K, d.h., zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ gilt für alle Punkte $x, y \in K$ mit $|x - y| < \delta$.

3. Aufgabe (4 P + 4 Zusatz-P)
Zeigen Sie, dass der Banachsche Fixpunktsatz ohne die Kontraktionseigenschaft im Allgemeinen nicht gilt.
Zusatz: Überlegen Sie sich, warum es kein Gegenbeispiel mit einer Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ ohne Fixpunkt gibt.

4. Aufgabe (4 P)
Betrachten Sie die Menge aller beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,

$$X := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty\},$$

versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Zeigen Sie: Die abgeschlossene Einheitskugel in $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht kompakt.
Hinweis: Finden Sie eine Folge f_n von Funktionen mit $\|f_n\|_\infty = 1$, die keine konvergente Teilfolge hat.