Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Dipl. Math. Hanne Hardering

9. Übung zur Vorlesung

Analysis 2 (lehramtsbezogen)

SoSe 2014

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2014/Vorlesungen/AnalysisII_LA.php`

Abgabe: Di., 01.07.2014, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 P)
Sei $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, eine zweimal differenzierbare Funktion. Sei weiter $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $H_f(x)$ die Hesse-Matrix von f in x.
Zeigen Sie:

$$D_v D_v f(x) = \langle H_f(x)v, v\rangle.$$

2. Aufgabe (4 P)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.
Zeigen Sie:

a) f ist genau dann konvex, wenn die Hesse-Matrix von f positiv semi-definit ist.

b) f ist genau dann konvex, wenn

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(\omega) = f(y + \omega(x - y))$.

3. Aufgabe (4 P)

a) Finden Sie Beispiele für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(0) = 0$ und jeweils den folgenden Eigenschaften:
   a) $H_f(0)$ ist positiv definit.
   b) $H_f(0)$ ist positiv semi-definit, aber nicht 0 und f hat ein Extremum in 0.
   c) $H_f(0)$ ist positiv semi-definit, aber nicht 0 und f hat kein Extremum in 0.
   d) $H_f(0)$ ist weder positiv noch negativ definit, aber regulär.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\nabla f(x_0) = 0$. Weiter seien $v, w \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$\langle H_f(x_0)v, v\rangle > 0,$$
$$\langle H_f(x_0)w, w\rangle < 0$$

gilt.

Was bedeutet dies für f jeweils eingeschränkt auf die Geraden $\{x_0 + tv \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ und $\{x_0 + tw \ : \ t \in \mathbb{R}\}$? Beschreiben Sie den Graphen von f an der Stelle x_0.

4. Aufgabe (4 P)
Sie haben mit Ihren Schülern im Unterricht Ableitungen und Tangenten durchgenommen. Ein Schüler merkt an:

> „Es ist doch $(x^3)' = 3x^2$. Das beschreibt doch gar keine Gerade - also Tangente - sondern eine Parabel.“

Gehen Sie auf diesen Einwand ein. Vergleichen Sie Ihre Erklärung mit der Definition der totalen Differenzierbarkeit aus der Vorlesung. Als Anregung können Sie sich mit dem auf der Homepage bereitgestellten Artikel "Wenn Berührende auch schneiden" von Andreas Büchtner beschäftigen.

5. Aufgabe (4 Zusatz-P)
Erklären Sie den Begriff Sattelpunkt und seine Herkunft. Warum können Sie dieses Bild in der Schule nicht verwenden?