Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Dipl. Math. Hanne Hardering

11. Übung zur Vorlesung

Analysis 2 (lehramtsbezogen)

SoSe 2014

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2014/Vorlesungen/AnalysisII_LA.php

Abgabe: Di., 22.07.2014, 12:00 Uhr

Dies ist ein Zusatzzettel, d.h. insbesondere die Aufgaben werden nur für diejenigen Studierenden korrigiert, denen noch Punkte zum Erreichen der aktiven Teilnahme (60%) fehlen.

1. Aufgabe (4 Zusatz-P)
Zeigen Sie, dass die Menge T der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ ein Unterraum des Vektorraums aller Funktionen auf $[a,b]$ ist und dass

$$I : T \to \mathbb{R}, \qquad I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

eine lineare Abbildung definiert.

2. Aufgabe (4 Zusatz-P)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in allen $x \in [a,b] \setminus D$.

a) Zeigen Sie, dass f integrierbar ist, wenn D nur endlich viele Punkte enthält.

b) Zeigen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels), dass f nicht integrierbar sein muss, wenn $D = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ für eine Folge x_k gilt.

3. Aufgabe (4 Zusatz-P)
Zeigen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels), dass folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ im Allgemeinen *nicht* gilt:
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

4. Aufgabe (4 Zusatz-P)
Sei $U \in \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f, g : U \to \mathbb{R}$ dreimal stetig partiell differenzierbar. Weiterhin gelte $\Delta f(x) = 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie die folgenden Formeln:

a) $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$

b) $\Delta|\nabla f|^2 = 2\|H_f\|_F^2$, wobei $\|\cdot\|_F$ die Frobenius-Norm ist.

5. Aufgabe (4 Zusatz-P)
Zu einer Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ sei der Abstand $d_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$

Zeigen Sie:

a) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.

b) Ist A abgeschlossen, so gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}^2$ ein $a \in A$ mit $d_A(y) = |y - a|$.

c) Geben Sie eine nicht abgeschlossene Menge an, für welche diese Behauptung falsch ist.