Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, R. Banisch

**Klausur zur Vorlesung**
**Stochastik II im SoSe 2014**

**Musterlösung**

---

## Teil I (10 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch oder nicht angekreuzte Aussage erhalten Sie 0 Punkte.

| wahr | falsch | Aussage |
|---|---|---|
| | x | Für jede Übergangsmatrix $P$ einer irreduziblen und aperiodischen Markov-Kette gibt es ein $n^*$, so dass $P^n > 0$ für alle $n \geq n^*$. |
| x | | Ist $X_n$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $X_n \overset{\text{i.V.}}{\to} a$ für ein $a \in \mathbb{R}$, dann gilt auch $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} a$. |
| | x | Für einen transienten Zustand einer Markov-Kette ist die Rückkehrzeit fast sicher unendlich. |
| x | | Der Durchschnitt von zwei $\sigma$-Algebren ist wieder eine $\sigma$-Algebra. |
| | x | Gilt $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ für zwei gemeinsam verteilte Zufallsvariable $X$ und $Y$, so sind $X$ und $Y$ unabhängig. |
| x | | Eine stochastische Matrix hat immer einen Eigenwert 1. |
| x | | Wenn $X$ und $Y$ unabhängige Zufallsvariablen sind, dann gilt $\mathbb{E}[X\|Y] = \mathbb{E}[X]$. |
| x | | Martingale haben konstante Erwartung: $\mathbb{E}[X_i] = \text{const.}$ für alle $i \geq 1$ |
| x | | Die Verteilung einer Zufallsvariable ist eindeutig durch ihre charakteristische Funktion bestimmt. |
| | x | Die Verteilung einer Zufallsvariable ist eindeutig durch ihre momentenerzeugende Funktion bestimmt. |

**Teil II (25 Punkte)**

Bearbeiten Sie **alle** der folgenden Aufgaben!

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**
Es sei $(Y_n)_{n\geq 0}$ ein Zufallsspaziergang auf $\mathbb{Z}$, der stets mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in [0,1]$ jeweils im aktuellen Zustand verbleibt und ansonsten mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts springt. Ferner sei durch

$$X_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } Y_n \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } Y_n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

eine Folge von Zufallsvariablen definiert.

a) Begründen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette auf dem Zustandsraum $S = \{0,1\}$ ist, und stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix auf.

b) Untersuchen Sie $(X_n)_{n\geq 0}$ für alle $\alpha \in [0,1]$ auf Irreduzibilität, Kommunikationsklassen, transiente und (positiv/null-)rekurrente Zustände sowie Periodizität.

c) Für welche $\alpha$ hat die Kette eine eindeutige stationäre Verteilung? Geben Sie sie an.

**Lösung:**

a) $(X_n)_{n\geq 0}$ hängt von $(Y_n)_{n\geq 0}$ ab, und $(Y_n)_{n\geq 0}$ ist eine Markov-Kette. Für die entsprechenden Übergangswahrscheinkichkeiten gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} \text{ ungerade} | Y_n \text{ gerade}) \\ &= \mathbb{P}(Y_{n+1} \neq Y_n) \\ &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} \text{ gerade} | Y_n \text{ ungerade}) \\ &= \mathbb{P}(Y_{n+1} \neq Y_n) \\ &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Analog berechnet man $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = \alpha$ und $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = \alpha$. Damit erhält man die Übergangsmatrix $P = (p_{xy})_{x,y=0,1}$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

b) $\underline{0 \leq \alpha < 1}$: Alle Zustände liegen in einer Kommunikationsklasse, denn der Prozess kommt von 0 nach 1, sowie von 1 nach 0 jeweils mit echt positiver Wahrscheinlichkeit. Damit ist der Prozess irreduzibel. Ausgehend von Zustand 0 kehrt man sicher in endlicher Zeit nach 0 zurück, denn es gilt: $\mathbb{P}_0(\tau_0 = \infty) = p_{01} \lim_{n\to\infty} p_{11}^n = 0$. D.h., 0 ist rekurrent. Da es sich um einen endlichen Zustandsraum handelt, sind damit alle Zustände positiv rekurrent. Für $\alpha \neq 0$ ist die Kette aperiodisch (Klasseneigenschaft), denn $p_{00}^{(2)} > 0$ und $p_{00}^{(3)} > 0$ mit

$\mathrm{ggT}\{2,3\} = 1$; für $\alpha = 0$ ist der Prozess periodisch mit Periode 2.

$\underline{\alpha = 1}$: Beide Zustände sind absorbierend, d.h., es gibt die Kommunikationsklassen $\{0\}$ und $\{1\}$. Wegen $\mathbb{P}_i(\tau_i = 1) = 1$, $i = 0, 1$ sind sie auch rekurrent, mithin positiv rekurrent. Die Periode ist jeweils 1, da $p_{00}^{(n)} = 1 > 0$ und $p_{11}^{(n)} = 1 > 0$ für alle $n \geq 1$.

c) Für $\alpha \neq 1$ ist die Kette irreduzibel. Die eindeutige stationäre Verteilung ist durch

$$\pi = \pi P\,, \quad \|\pi\|_1 = 1\,, \quad \text{d.h.} \quad \pi = \left(\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\right),$$

gegeben. Für $\alpha = 1$ ist $P = \mathrm{Id}$ und es gibt unendlich viele stationäre Verteilungen (jedes Zählmaß auf $\{0, 1\}$ liefert eine stationäre Verteilung).

**Aufgabe 2 (5 Punkte)**
Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von normalverteilten Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n^2)$. Bestimmen Sie eine Zufallsvariable $X$, für die gilt:

$$X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} X\,, \quad n \to \infty\,.$$

**Hinweis:** Sie dürfen voraussetzen, dass $\varphi(s) = e^{is\mu - \sigma^2 s^2/2}$ die charakteristische Funktion einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariable ist.

**Lösung:** Die charakteristische Funktion von $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n^2)$ ist

$$\varphi_{X_n}(s) = e^{-s^2/(2n^2)}$$

und konvergiert für alle $s \in \mathbb{R}$ punktweise gegen $\varphi_X(s) = 1$. Letztere ist die charakteristische Funktion einer Zufallsvariable, die fast sicher den Wert $X = 0$ hat, denn

$$\varphi_X(s) = \int_\Omega e^{isx} d\delta_0(x) = e^0 = 1\,.$$

Nach dem Stetigkeitssatz von Levy-Cramér folgt aus der punktweise Konvergenz $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ der charakteristischen Funktionen, die Konvergenz in Verteilung, d.h.

$$X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} 0\,, \quad n \to \infty\,.$$

**Aufgabe 3 (5 Punkte)**
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ist $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen $\Omega_1$ und $\Omega_2$, so ist die Funktion $\mathcal{B}(\Omega_1)$-$\mathcal{B}(\Omega_2)$-messbar.

**Lösung:** Die Aussage ist richtig. Für die Messbarkeit von $f$ reicht es zu zeigen, dass

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}(\Omega_1)\,,$$

wobei $\mathcal{E}$ irgendein Erzeuger von $\mathcal{B}(\Omega_2)$ ist. Sei also $\mathcal{E}$ das System der offenen Teilmengen von $\Omega_2$, das die Borelmengen über $\Omega_2$ erzeugt. Wegen der Stetigkeit von $f$ ist $f^{-1}(O)$ für jede offene Teilmenge $O \subset \Omega_2$ eine offene Teilmenge von $\Omega_1$. Da $\mathcal{B}(\Omega_1)$ von den offenen Teilmengen von $\Omega_1$ erzeugt wird, ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\Omega_1)$, $O \in \mathcal{E}$ und damit ist die Messbarkeit gezeigt.

**Aufgabe 4 (5 Punkte)**
Seien $(Z_n)_{n\geq 1}$ und $Z$ reelle Zufallsvariablen auf dem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$. Zeigen Sie, dass aus

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |Z_n - Z| \,\mathrm{d}\mathbb{Q} = 0$$

auch $Z_n \overset{\mathbb{Q}}{\to} Z$ folgt.

**Lösung:** Es gilt

$$\int_\Omega |Z_n - Z| \, d\mathbb{Q} = \mathbb{E}(|Z_n - Z|)\,.$$

Aus der Markov-Ungleichung folgt, dass

$$\mathbb{Q}(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|Z_n - Z|)}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0\,,$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung für festes $\varepsilon$ gegen 0 konvergiert. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0\,,$$

was zu beweisen war.

**Bemerkung:** Aus der Konvergenz $\mathbb{E}[|Z_n - Z|] \to 0$ folgt *nicht* die fast sichere Konvergenz $Z_n \to Z$. Zum Beispiel gilt für die Folge von Zufallsvariablen

$$Z_n(\omega) = \chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}(\omega)\,, \quad n = j + 2^k\,,\ 0 \leq j \leq 2^k\,,\ k \in \mathbb{N}_0$$

auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda|_{[0,1]})$, dass

$$\mathbb{E}[|Z_n - Z|] = \int_{[0,1]} |Z_n(\omega)| \, d\lambda(\omega) = 2^{-k}\,, \quad k = k(n)\,,$$

d.h. $Z_n \to 0$ in $L^1$, aber die Folge der $Z_n$ konvergiert für kein $\omega \in [0,1]$ punktweise.

**Ende der Klausuraufgaben**