Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, R. Banisch

Nachklausur zur Vorlesung Stochastik II im SoSe 2014

Musterlösung

Teil I (10 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch oder nicht angekreuzte Aussage erhalten Sie 0 Punkte.

wahr	falsch	Aussage
	x	Aus $\mathbb{E}[\lvert X_n - X\rvert] \to 0$ folgt die fast sichere Konvergenz $X_n \to X$.
	x	Die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markov-Kette auf endlichem Zustandsraum hat nur echt positive Einträge.
x		Für jede Folge von unabhängigen, identisch verteilten, integrierbaren Zufallsvariablen gilt das starke Gesetz der großen Zahlen.
x		$\mathbb{E}[X]$ ist die beste Approximation einer Zufallsvariable $X \in L^2(\Omega, P)$ durch $c \in \mathbb{R}$ im Sinne der kleinsten Quadrate, d.h. $\mathbb{E}[X] = \operatorname{argmin} \mathbb{E}[(X-c)^2]$.
x		Gemeinsam normalverteilte Zufallsvariable sind genau dann unabhängig, wenn sie unkorreliert sind.
x		Für jede integrierbare Zufallsvariable X gilt fast sicher $\mathbb{E}[X\lvert\sigma(X)] = X$.
	x	Jede Markovkette hat eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung.
	x	Für zwei reelle Zufallsvariablen X, Y gilt $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.
	x	Ist die charakteristische Funktion $\varphi_X(s) = \mathbb{E}[e^{isX}]$ einer Zufallsvariable X an der Stelle $s = 0$ differenzierbar, so ist $\mathbb{E}[X] = -i\varphi'(0)$.
x		Jede endliche Familie von integrierbaren Zufallsvariablen ist gleichgradig integrierbar.

Teil II (25 Punkte)

Bearbeiten Sie **alle** der folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben ist die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

einer Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit 4 Zuständen

a) Untersuchen Sie $(X_n)_{n\geq 0}$ auf Irreduzibilität, Kommunikationsklassen, transiente und positiv bzw. null-rekurrente Zustände sowie Periodizität.

b) Eine stationäre Verteilung π einer Markovkette heißt *maximal*, wenn jede andere stationäre Verteilung η absolut stetig bezüglich π ist. Berechnen Sie alle stationären Verteilungen und untersuchen Sie, ob es eine maximale stationäre Verteilung gibt. Geben Sie sie ggf. an und diskutieren Sie die Frage, ob sie eindeutig ist.

Lösung:

a) Sei $S = \{1, 2, 3, 4\}$ der Zustandsraum der Kette. Es gibt kein einziges Paar von miteinander kommunizierenden Zuständen $x, y \in S$, die verschieden sind $(x \neq y)$, die Kette ist also nicht irreduzibel Da jeder Zustand mit sich selbst kommuniziert, sind die Kommunikationsklassen $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ und $\{4\}$. Die Zustände $x = 1, 2, 3$ sind rekurrent, weil die Rückkehrzeit bei Start in x fast sicher 1 ist, d.h. $P_x(\tau_x < \infty) = 1$; da der Zustandsraum endlich ist, sind sie automatisch positiv rekurrent. Zustand $x = 4$ ist transient, weil wegen $p_{44}^{(n)} = 0$ für $n \geq 1$ gilt, dass $P_x(\tau_x < \infty) = 0 < 1$; damit ist Zustand 4 periodisch mit Periode $d(4) = \infty$, alle übrigen Zustände sind wegen $p_{xx}^{(n)} = 1$ für $x = 1, 2, 3$ aperiodisch.

b) Die stationären Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $(X_n)_{n\geq 0}$ werden durch die Eigenwertgleichung $P^T\eta = \eta$ mit $\|\eta\|_1 = 1$ bestimmt. Der Eigenraum von P^T zum Eigenwert $\lambda = 1$ ist 3-dimensional; die stationären Verteilungen sind von der Form

$$\eta = (a, b, c, 0)^T \text{ mit } a, b, c \geq 0 \text{ und } a + b + c = 1.$$

Maximale stationäre Verteilungen π sind alle η mit $a, b, c > 0$, denn nur für sie gilt:

$$\pi(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta(A) = 0 \quad \forall A \in 2^S.$$

Es gibt also unendlich viele maximale Verteilungen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Zeigen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussage: Es gibt kein Maß $\mu\colon 2^Q \to \bar{R}$ auf $Q = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ mit der Eigenschaft $\mu(I_{a,b}) = b - a$, wobei $I_{a,b} = \{q \in Q\colon a \leq q \leq b\,,\ a, b \in Q\}$.

Lösung: Ein solches Maß existiert nicht. Um einen Widerspruch zu bekommen, reicht es, mit Hilfe der σ-Additivität zu argumentieren, dass

$$\mu(Q) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} q_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(\{q_n\}) = 0\,,$$

wobei $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$ ist und wir ausgenutzt haben, dass aufgrund der Stetigkeit von Maßen von oben gilt, dass

$$\mu(\{q_n\}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mu(I_{q_n, q_n+\varepsilon}) = 0\,.$$

Da nach Definition $\mu(Q) = 1$ ist, kann es dieses Maß nicht geben.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, dass für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_F(X_n) = P(X_1 \in F) \quad \text{(f.s.)}\,,$$

wobei χ_F die Indikatorfunktion der Menge F bezeichnet.

Lösung: Die Aussage folgt aus der Messbarkeit der Indikatorfunktion χ_F und dem starken Gesetz der großen Zahlen: Die Zufallsvariablen $Y_n = \chi_F(X_n)$, $n \in \mathbb{N}$ sind unabhängig und identisch bernoulliverteilt mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[\chi_F(X_1)] = \int_{\{X_1(\omega)\in F\}} dP(\omega) = P(X_1 \in F) < \infty\,.$$

Für die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt damit fast sicher

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Y_n = \mathbb{E}[Y_1] = P(X_1 \in F)\,.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es sei $(\xi_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen auf $\{\pm 1\}$ mit

$$P(\xi_i = 1) = p \quad \text{und} \quad P(\xi_i = -1) = 1 - p\,.$$

Sei ferner $Z_n = x + \sum_{i=1}^n \xi_i$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$M_n = Z_n - n(2p-1)\,, \quad n \geq 0$$

für alle $p \in [0,1]$ ein Martingal bezüglich der von $(Z_n)_{n\geq 0}$ erzeugten Filtration ist.

Lösung: Der Prozess $(M_n)_{n\geq 0}$ ist nach Konstruktion an die von $(Z_n)_{n\geq 0}$ erzeugte Filtration adaptiert. Wir setzen $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ und müssen zeigen, dass $\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] = 0$ für alle $n \geq 1$. Also dann:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\xi_{n+1} - (2p-1)|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] - (2p-1)\mathbb{E}[1|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[\xi_{n+1}] - (2p-1) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt zum einen ausgenutzt haben, dass ξ_{n+1} von $Z_1, \ldots, Z_n$ unabhängig ist und somit gilt, dass $\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi_{n+1}]$, und zum anderen, dass $\mathbb{E}[1|\mathcal{F}_n] = 1$. Der allerletzte Schritt basiert auf der Eigenschaft $\mathbb{E}[\xi_{n+1}] = 2p - 1$ der Bernoullivariable ξ_{n+1}.

.

Ende der Klausuraufgaben