Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ralf Banisch

2. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2014

Abgabe bis Donnerstag, 8. Mai 2014, 14 Uhr

1. Aufgabe (Konvergenz, 4 Punkte) Gegeben sei die Folge $(f_n)_n$ von Funktionen

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(\omega) = n^\alpha \chi_{[0,1/n]}(\omega)$$

mit $0 \le \alpha \le 1$.

a) Untersuchen Sie f_n und $\int f_n\, d\lambda$ auf Konvergenz, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet, für alle $\alpha \in [0,1]$.

b) Für welche $\alpha \in [0,1]$ hat f_n eine integrable Majorante $g(\omega) = \sup_n f_n(\omega)$? Geben Sie $g(\omega)$ ggf. an.

2. Aufgabe (Jensensche Ungleichung, 4 Punkte) Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine bezüglich P integrierbare Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung, dass für $0 < r < s$ die Lyapunov-Ungleichung gilt:

$$\left(\int |f|^r\, dP\right)^{1/r} \le \left(\int |f|^s\, dP\right)^{1/s}.$$

3. Aufgabe (Satz von Fubini, 4 Punkte) Geben Sie eine messbare Funktion $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ an, die auf $[0,1] \times [0,1]$ nicht integrabel ist und für die gilt, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, d\lambda(x) d\lambda(y) \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, d\lambda(y) d\lambda(x)\,.$$

(**Hinweis:** Finden Sie eine Funktion, die positive und negative Werte annimmt und deren positive bzw. negative Äste jeweils nicht integrierbar sind.)