Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ralf Banisch

2. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2014

Abgabe bis Donnerstag, 15. Mai 2014, 14 Uhr

Aufgabe 1 (Dichtefunktion, 4 Punkte) Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty)$ messbar.

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\nu : \mathcal{E} \to [0, \infty], \quad E \mapsto \int_\Omega f \cdot \chi_E \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{E})$ definiert wird.

b) Was muss gelten, damit ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist?

Aufgabe 2 (Riemann-Stieltjes-Integral, 4 Punkte)

Es sei $X : (\Omega, \mathcal{E}, P) \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, gleichmäßig stetige Funktion. Das *Riemann-Stieltjes-Integral* von g bezüglich F sei durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dF(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} g(a_{j+1}^N) \left[F(a_{j+1}^N) - F(a_j^N) \right],$$

erklärt, wobei $-\infty < a_0^N < a_1^N < ... < a_N^N < a_{N+1}^N < \infty$ eine Partition des Intervalls $[a_0^N, a_{N+1}^N]$ ist und der Limes so gebildet wird, dass $a_0^N \to -\infty$ und $a_{N+1}^N \to \infty$ und $\lim_{N\to\infty} \max_{j=0,...,N} (a_{j+1}^N - a_j^N) = 0$.

a) Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dP_X(x).$$

b) Angenommen, F ist differenzierbar mit Dichtefunktion $f = F'$. Wie lassen sich die Integrale aus a) mit Hilfe der Dichtefunktion darstellen?

Aufgabe 3 (Charakteristische Funktion, 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable.

b) Zeigen Sie: Sind $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ mit charakteristischen Funktionen $\varphi_{X_1}, ..., \varphi_{X_n}$ und $S = \sum_{i=1}^n X_i$, dann gilt

$$\varphi_S = \varphi_{X_1} \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}.$$

c) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig, identisch Bernoulli-verteilt zum Parameter $0 < p < 1$. Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von $S = \sum_{i=1}^n X_i$ mithilfe von b) und vergleichen Sie das Ergebnis mit der charakteristischen Funktion einer binomialverteilten Zufallsvariable.