Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ralf Banisch

5. Übung zur Vorlesung

Stochastik II

Sommersemester 2014

Abgabe bis Mittwoch, 28. Mai 2014, 14 Uhr

Aufgabe 1 (Noch einmal schwache Konvergenz, 4 Punkte) Es sei X_n binomialverteilt mit Parameter $p_n > 0$ (Erfolgswahrscheinlichkeit). Ferner gelte $p_n \to 0$ mit $np_n \to \lambda > 0$ für $n \to \infty$.

a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion φ_n von X_n sowie den Grenzwert $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$. Finden Sie eine Zufallsvariable X mit charakteristischer Funktion φ.

b) Für X_n und X aus a) bezeichne μ_n das durch X_n induzierte Bildmaß und μ das durch X induzierte Maß, wobei nach a) gilt, dass $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Prüfen Sie, ob sogar $\|\mu_n - \mu\|_{\mathrm{TV}} \to 0$ gilt.

Aufgabe 2 (Momenterzeugende Funktion, 4 Punkte) Für eine Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ sei $D := \{s \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\exp(sX)] < \infty\}$. Die Funktion

$$\begin{aligned} M\colon D &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \mathbb{E}[\exp(sX)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(sx)\, dP_X(x) \end{aligned}$$

heißt *momenterzeugende Funktion* von X.

a) Analysieren Sie den Definitionsbereich von M. Betrachten Sie dabei positive und negative Zufallsvariable getrennt. Ist es möglich, dass $D = \emptyset$ gilt?

b) Gegeben sei die Zufallsvariable X auf $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, 2^{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}, P)$ mit der Zähldichte

$$P(X = n) = \frac{1}{2\zeta(2)\, n^2}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

wobei $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ die Riemannsche ζ-Funktion an der Stelle $a \in \mathbb{C}$ mit $\Re(a) > 1$ bezeichnet. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion M für X und geben Sie den Definitionsbereich an.

Aufgabe 3 (Normalverteilung, 4 Punkte) Die Zufallsvariable $X = (X_1, X_2)$ sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}^2$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei Σ symmetrisch positiv definit ist.

a) Berechnen Sie die Randverteilung von X_1.

b) Zeigen Sie, dass X_1, X_2 genau dann unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind, d.h., wenn gilt:

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = 0\,.$$

c) Berechnen Sie die Momenterzeugende von $X_1 + X_2$ im Fall, dass X_1 und X_2 unabhängig sind.