Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ralf Banisch

7. Übung zur Vorlesung

# Stochastik II

Sommersemester 2014

**Abgabe bis Donnerstag, 13. Juni 2014, 14 Uhr**
Die Matlab-Dateien bitte per Mail an `ralf.banisch@fu-berlin.de` schicken sowie ausdruckt abgeben.

**Aufgabe 1** (Markov-Ketten, 6 Punkte)
Man betrachte einen Zufallsspaziergang auf $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Für alle inneren Zustände $S_0 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ sei $p_+ \in (0, 1)$ die Wahrscheinlichkeit, einen Schritt nach rechts zu machen; $p_- = 1 - p_+$ sei die Wahrscheinlichkeit, einen Schritt nach links zu machen; d.h., für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = p_+, \quad i \in S \backslash \{-3, 3\}$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = p_-, \quad i \in S \backslash \{-3, 3\}.$$

Für das Verhalten des Prozesses am Rand des Zustandsraumes werden drei Fälle unterschieden:

1. Die Randzustände $\{-3, 3\}$ sind *absorbierend*, d.h.
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = i) = 1\,, \quad i \in \{-3, 3\}\,.$$
2. Die Randzustände $\{-3, 3\}$ sind *reflektierend*, d.h.
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = -2 | X_n = -3) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 3) = 1\,.$$
3. Der Zustandsraum ist *periodisch*, d.h.
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3 | X_n = -3) = p_- \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = -2 | X_n = -3) = p_+$$
bzw. analog
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = -3 | X_n = 3) = p_+ \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 3) = p_-\,.$$

Aufgaben:

a) Stellen Sie für jeden der drei Fälle die Übergangsmatrix $P$ auf.

b) Bestimmen Sie den Vektor $\pi_0 \in \mathbb{R}^{|S|}$ der Anfangsverteilung für
   (i) einen Start in Zustand $i = 0$ fast sicher und
   (ii) für einen gleichverteilten Start auf ganz $S$.

   Berechnen und plotten Sie (z.B. mit MATLAB) die Verteilungen $\pi_n = \pi_0^T P^n$ für $n = 1, 10, 100$ und alle Kombinationen von $P$ und $\pi_0$. Setzen Sie dafür $p_+ = 0.7$.

c) Berechnen Sie für jede Variante von $P$ die Gleichgewichtsverteilung $\mu$ der Markov-Kette als Linkseigenvektor von $P$ zum Eigenwert 1, d.h. $\mu^T P = \mu^T$ (z.B. wieder mit MATLAB). Dabei soll wieder $p_+ = 0.7$ gelten. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Verteilungen aus b).

Bitte wenden!

**Aufgabe 2** (Seltene Ereignisse, 6 Punkte)
Die Zufallsvariable $X$ sei standardnormalverteilt. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit $p = \mathbb{P}(X \geq 5)$ mithilfe eines Monte-Carlo-Verfahrens zu schätzen (vgl. Beispiel 2.55 im Skript). Die Schätzer

$$\hat{p} = \frac{1}{100\,000} \sum_{i=1}^{100\,000} \chi_{\{X_i \geq 5\}}$$

und

$$\hat{p}^{(100)} = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} \left( \frac{1}{100\,000} \sum_{i=1}^{100\,000} \chi_{\{X_i^{(j)} \geq 5\}} \right)$$

liefern in der Regel keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Ein Verfahren zur Verbesserung des Schätzers wird im Skript auf Seite 48 (siehe Beispiel 2.64) beschrieben und soll hier wie folgt getestet werden.

a) Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte $\gamma^*$ zur Kumulantenerzeugenden $\gamma(s) = \frac{s^2}{2}$ von $X$.

b) Für eine feste Stichprobenzahl $n \in \mathbb{N}$ sei $P$ die Verteilung für das Tupel $(X_1, ..., X_n)$ von unabhängigen Kopien von $X$. Ferner sei $P_s$ ein alternatives Wahrscheinlichkeitsmaß mit

$$dP_s = e^{sS_n - n\gamma(s)} dP\,, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n\,.$$

wobei wir für die Integration bezüglich $P$ die Schreibweise

$$dP(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left( -\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{2} \right) dx.$$

verwenden. Geben Sie den Schätzer für $p$ bezüglich $P_s$ an und wählen Sie $s$ so, dass die Varianz des neuen Schätzers minimiert wird. Welche Verteilung erhalten Sie?

c) Schätzen Sie $p$ nun mithilfe eines Monte-Carlo-Verfahrens (MATLAB) mit den Schätzern $\hat{p}$ und $\hat{p}^{(100)}$ sowie mit den entsprechend umgewichteten Schätzern mit $P_s$ als zugrundeligendes Wahrscheinlichkeitsmaß. Beschreiben und interpretieren Sie Ihre Beobachtungen.