Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. C. Gräser
Dipl.Math. H. Hardering

Analysis II (lehramtsbezogen) A
SoSe 2014

Name:______________________________ Matr.-Nr.:____________________

Studiengang:
◯ Mathematik ◯ Physik ◯ Informatik
◯ anderer:

Studienziel:
◯ Bachelor(Mono) ◯ Bachelor(Kombi, Lehramt) ◯ Master
◯ Diplom ◯ Lehramt(Staatsexamen) ◯ anderes:

Beschriften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, mit Ihrem Namen. Bitte heften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, nach der Klausur mit einem der bereitgestellten Hefter zusammen.
Bitte benutzen Sie keinen Bleistift. Erlaubte Hilfsmittel sind alle Ihre selbst mitgebrachten schriftlichen Unterlagen und Bücher. Die Verwendung von allen elektronischen Hilfsmitteln wie Hand, ... außer einem nichtprogrammierbarem Taschenrechner ist nicht erlaubt. Die Klausur besteht mit Deckblatt aus insgesamt 3 Seiten auf zwei Blättern.

Wenn Sie Ihre Klausurergebnisse auf der Web-Seite der Vorlesung unter Ihrer Matrikelnummer nachlesen wollen, unterschreiben Sie bitte die folgende Erklärung:

Ich bin damit einverstanden, dass mein Ergebnis bei dieser Klausur unter meiner Matrikelnummer auf der Web-Seite zur Vorlesung veröffentlicht wird.

______________________________ (Unterschrift)

Aufgabe	I	II.1	II.2	II.3	$\sum$
Punkte					

Viel Glück!

Teil I (8 Punkte)

Geben Sie für jede der folgen Aussagen an, ob Sie richtig oder falsch ist und begründen Sie Ihre Antwort mit einem Satz oder Gegenbeispiel.

Für jede Teilaufgabe, bei der Ihre Antwort und die Begründung richtig sind, bekommen Sie einen Punkt. Für alle unvollständig oder falsch gelösten Teilaufgabe erhalten Sie Null Punkte.

a) Alle Funktionen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, die beschränkt sind, d.h. für die $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, sind Riemann integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx \leq C(b-a)$.

b) Gilt für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$

$$f(y) - f(x) = Df(z)(y-x) \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$$

so ist f konstant.

c) Sei $\nabla f(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ die Nullmatrix für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Dann kann x_0 kein isoliertes Extremum sein.

d) Die Hessematrix einer zweimal stetig differenzierbaren konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist überall positiv semidefinit.

e) Es existiert eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die ihr Supremum, aber nicht ihr Infimum annimmt.

f) Die Menge $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist abgeschlossen als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

g) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

h) Ist eine Funktion stetig und differenzierbar, so ist sie auch stetig differenzierbar.

Bitte wenden

Teil II (16 Punkte)

Bitte lösen Sie **alle** folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = y \\ |x - y| + 1, & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik definiert.

b) Charakterisieren Sie alle bezüglich d konvergenten Folgen. Begründen Sie, warum es keine weiteren konvergenten Folgen geben kann.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

a) Sei $A : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^n$ eine symmetrische Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

Zeigen Sie, dass f zweimal differenzierbar ist und berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 17x + 19y + 371\pi.$$

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minima, Maxima und Sattelpunkte von g.

Ende der Klausur