Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. C. Gräser, T. Kies

Numerik I A
SoSe 2015

Name: ________________________ Matr.-Nr.: ______________

Studiengang:
◯ Mathematik ◯ Physik ◯ Informatik
◯ anderer:

Studienziel:
◯ Bachelor(Mono) ◯ Bachelor(Kombi, Lehramt) ◯ Master
◯ Diplom ◯ Lehramt(Staatsexamen) ◯ anderes:

Beschriften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, mit Ihrem Namen. Bitte heften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, nach der Klausur mit einem der bereitgestellten Hefter zusammen.
Bitte benutzen Sie keinen Bleistift. Erlaubte Hilfsmittel sind alle Ihre selbst mitgebrachten schriftlichen Unterlagen und Bücher. Die Verwendung von allen elektronischen Hilfsmitteln wie Handy, ... außer einem nichtprogrammierbarem Taschenrechner ist nicht erlaubt. Die Klausur besteht mit Deckblatt aus insgesamt 4 Seiten auf zwei Blättern.

Wenn Sie Ihre Klausurergebnisse auf der Web-Seite der Vorlesung unter Ihrer Matrikelnummer nachlesen wollen, unterschreiben Sie bitte die folgende Erklärung:

Ich bin damit einverstanden, dass mein Ergebnis bei dieser Klausur unter meiner Matrikelnummer auf der Web-Seite zur Vorlesung veröffentlicht wird.

______________________________ (Unterschrift)

Aufgabe	I	II.1	II.2	II.3	II.4	$\sum$
Punkte						

Viel Erfolg!

Teil I (8 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob Sie richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Antwort mit einem Satz oder Gegenbeispiel.

Für jede Teilaufgabe, bei der Ihre Antwort und die Begründung richtig sind, bekommen Sie einen Punkt. Für alle unvollständig oder falsch gelösten Teilaufgaben erhalten Sie null Punkte.

a) Das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in (0, T], \qquad x(0) = x_0$$

besitzt für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und alle Zeiten $T > 0$ eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Lösung $x : [0, T] \to \mathbb{R}^d$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x, y) = (\cos(y), \frac{1}{2}\sin(x))$ gegeben. Dann hat f in $M = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ einen Fixpunkt.

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit einer eindeutig bestimmten Minimalstelle $x^* \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Iteration $x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f'(x_\nu)}{f''(x_\nu)}$ für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen x^*.

d) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U \subset V$ der Unterraum $U = \{x \in V \mid x_1 = 0\}$. Dann hat die Bestapproximationsaufgabe

$$u \in U : \qquad \|u - f\|_\infty \leq \|v - f\|_\infty \qquad \forall v \in U$$

bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ für jedes $f \in V$ eine Lösung.

e) Jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $T \circ T = T$ und $\|T\| = 1$ hat die Eigenschaft

$$(Tv, u - Tu) = 0 \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^4.$$

f) Sei $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit zugehörigen Newton-Côtes-Gewichten μ_i mit $\mu_i \geq 0$, $i = 0, \ldots n$. Dann gilt $\sum_{i=0}^{n} \mu_i^n \leq 1$.

g) Ist $X = C[a, b]$, so besitzt die Bestapproximationsaufgabe

$$\min_{v \in V} \|f - v\|_\infty$$

für jeden endlich-dimensionalen Untervektorraum $V \subseteq X$ mit $\dim(V) \geq 2$ und jedes $f \in X \setminus V$ unendlich viele Lösungen.

h) Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\int_{-1}^{1} \cos(k \arccos(x)) \left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} (x^2 - 1)^{k+1} \right) \mathrm{d}x = 0.$$

Bitte wenden

Teil II (16 Punkte)

Bitte lösen Sie **alle** folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (2+1 Punkte)
Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + \sin(\pi x)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom $p_3 \in \mathcal{P}_3$ mit der Eigenschaft

$$p_3(0) = f(0), \qquad p_3'(0) = f'(0), \qquad p_3'(1) = f(1), \qquad p_3'(1) = f'(1).$$

b) Geben Sie eine obere Schranke für den Interpolationsfehler $\|f - p_3\|_\infty$ bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf $[-1, 1]$ an.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es sei wieder $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + \sin(\pi x)$ gegeben. Nun soll f durch eine Funktion

$$u(x) = a + b\sin(\pi x) + c\cos(\pi x)$$

mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ so approximiert werden, dass die Summe der Fehlerquadrate in den Punkten -1, -0.5, 0, 0.5 und 1 minimal wird.

a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem.

b) Geben Sie die zugehörige Normalengleichung an, formulieren Sie diese als lineares Gleichungssystem und berechnen Sie die Einträge der Matrix und der rechten Seite.

c) Ist das Ausgleichsproblem lösbar? Wenn ja, ist die Lösung eindeutig bestimmt?

d) Wie kann die Lösung des Ausgleichsproblems numerisch stabil berechnet werden?

e) Nun soll ein modifiziertes Ausgleichsproblem betrachtet werden: Geben Sie direkt diejenige Approximation von f durch eine Funktion

$$u(x) = a + bx + cx^2$$

an, die die Summe der Fehlerquadrate in den Punkten -1, 0 und 1 minimiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ und ein uniformes Gitter $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ mit $x_k = a + hk$ für $k = 0, \ldots, n$ und Schrittweite $h = (b - a)/n$ betrachten wir den Raum $S_n = \{v \in C([a, b]) \,|\, v|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \mathcal{P}_1\}$. Zeigen Sie, dass sich der L^2-Bestapproximationsfehler von $f \in C^2([a, b])$ in S_n wie folgt abschätzen läßt

$$\min_{v \in S_n} \|f - v\|_{L^2} \leq \frac{(b - a)^{5/2}}{2n^2} \|f''\|_\infty.$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Für $f \in C([-1,1])$ betrachten wir die Quadraturformel

$$\hat{I}(f) := 2\lambda_1 f(-\alpha) + 2\lambda_2 f(\alpha)$$

mit symmetrisch verteilten Quadraturpunkten $-\alpha, \alpha$ für $\alpha \in (0,1]$ und Gewichten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in (0,1]$ Gewichte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$\hat{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \qquad \forall f \in \mathcal{P}_1.$$

b) Bestimmen Sie ein $\alpha \in (0,1]$ und zugehörige Gewichte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$\hat{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \qquad \forall f \in \mathcal{P}_3 \tag{1}$$

c) Existieren $\alpha \in (0,1]$ und Gewichte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\hat{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \qquad \forall f \in \mathcal{P}_l$$

auch für ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l > 3$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welche Ordnung hat die zu $\hat{I}$ gehörende summierte Quadraturformel, wenn $\alpha \in (0,1]$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft (1) erfüllen?
(Gemeint ist die maximale Ordnung, die sich mit den Mitteln aus der Vorlesung für Funktionen aus C^∞ zeigen lässt.)

Ende der Klausur