Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

1. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2015

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2015/NumerikI.php

Abgabe: Do., 30.04.2015, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe *(Schrankensatz)* (4 TP)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene und konvexe Menge sowie $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Existiere weiter $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\sup_{x\in U} \|Df(x)\| \leq c$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante c ist.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit Fixpunkt $x^* \in \mathbb{R}$ und $|\phi'(x^*)| \neq 1$. Zeigen Sie, dass dann mindestens eine der Iterationsvorschriften

a) $x_{k+1} := \phi(x_k)$,

b) $x_{k+1} := \phi^{-1}(x_k)$

eine wohldefinierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschreibt, die lokal gegen x^* konvergiert.

3. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie, dass die Gleichung $x + \ln x = 0$ genau eine Lösung z im Intervall $[0.5, 0.6]$ besitzt. Bestimmen Sie weiter, welche der folgenden Iterationsfolgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für Startwerte x_0 aus einer offenen, nichtleeren Umgebung um z gegen z konvergieren:

a) $x_{k+1} = -\ln x_k$

b) $x_{k+1} = e^{-x_k}$

c) $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + e^{-x_k})$

4. Aufgabe (4 TP)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Weiter bezeichne $\lambda_{\max}(A) \in \mathbb{R}$ den größten Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in (0, \frac{2}{\lambda_{\max}(A)})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die durch

$$x_{k+1} := x_k + \alpha(b - Ax_k)$$

definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen die eindeutige Lösung von $Ax = b$ konvergiert.
Hinweis: Für jede symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\lambda_{\min}(M) = \min_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle Mx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle Mx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \lambda_{\max}(M).$$