Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

3. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2015

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2015/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 15.05.2015, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)
Gegeben sei der normierte Vektorraum $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, der Unterraum $U = \{u = (u_1, u_2) \in V : u_1 - u_2 = 0\}$ sowie $f = (2,4) \in V$.

a) Formulieren Sie die entsprechende Bestapproximationsaufgabe. Ist sie lösbar? Ist eine etwaige Lösung eindeutig?

b) Geben Sie die zur Bestapproximationsaufgabe äquivalente Normalengleichung an.

c) Laut Skript läßt sich die Bestapproximationsaufgabe $p \in U$ über eine orthogonale Projektion P charakterisieren. Wie lautet der Zusammenhang? Geben Sie die Projektion P explizit an und berechnen Sie damit die Bestapproximation $p \in U$ an $f = (2,4)$.

2. Aufgabe (4 TP)
Beweisen Sie: „Sei V ein Prähilbertraum und $P : V \to U = R(P)$ eine Orthogonalprojektion. Dann ist

$$u = Pf$$

die Bestapproximation von f auf U.“ (vgl. **Satz 2.8** aus der Vorlesung).

3. Aufgabe (4 TP)

a) Zeigen Sie: Ein Prähilbertraum ist strikt konvex.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen strikt konvexen Raum an, der kein Prähilbertraum ist.

4. Aufgabe (4 TP)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge sowie $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung des Problems

$$\min_{z \in U} \|z - x\|_2^2 \tag{1}$$

gibt.

b) Beweisen Sie, dass $\overline{x} \in U$ genau dann (1) löst, wenn

$$\forall z \in U\colon\ \langle \overline{x} - x, z - \overline{x} \rangle \geq 0$$

gilt.

Hinweis: Orientieren Sie sich an dem Beweis für den Fall, dass U ein Unterraum ist.