Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

6. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2015

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2015/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 05.06.2015, 12:00 Uhr ALLGEMEINE HINWEISE

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)
Bestimme die quadratischen Interpolationspolynome an den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ bzw. die kubischen Interpolationspolynome unter Hinzunahme der Stützstelle $x_3 = \frac{1}{2}$ für die Funktion

$$f(x) = \cos(\pi x)$$

nach dem Ansatz von Lagrange und nach dem Ansatz von Newton.

2. Aufgabe (4 TP)
Sei $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Knotenverteilung im Intervall $I = [a, b]$. Für eine stetige Funktion $g \in C(I)$ ist der *interpolierende Linienzug* $\mathcal{I}g \in C(I)$ definiert durch

- $\mathcal{I}g(x_i) = g(x_i)$ für $i = 0, \dots, n$,
- $\mathcal{I}g\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ ist Polynom ersten Grades für $i = 0, \dots, n-1$.

Zeigen Sie:

a) Für jede Funktion $g \in C^2(I)$ gilt

$$\|g - \mathcal{I}g\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|g''\|_\infty \ ,$$

wobei $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ der „Gitterweitenparameter“ ist.

b) Für die absolute Kondition der Linienzuginterpolation gilt $\kappa_{\text{abs}} = 1$.

Führen Sie Unterschiede zur Polynominterpolation an.

3. Aufgabe (4 PP)

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Funktion `function v = AitkenNeville(x,fx,u)`. Sie soll zu gegebenen Funktionswerten `fx` an den Stützstellen `x` den Funktionswert des Interpolationspolynoms $p(u)$ an einem bestimmten Punkt u berechnen. Hierzu soll das aus der `CoMa` bekannte Schema von Aitken-Neville verwendet werden.

b) Erzeugen Sie ein MATLAB-Programm `function[ ] = Interpolation(x,f,g)`. Dieses soll das Interpolationspolynom zu einer gegebenen Funktion $f \in C[a,b]$ berechnen, die Interpolation erfolgt an den Stützstellen in dem Vektor x. Der Vektor g enthält die Gitterknoten, an welchen das Interpolationspolynom für den Plot berechnet werden soll. Plotten Sie zum Vergleich des Ergebnisses auch die ursprüngliche Funktion f. Die Funktion `AitkenNeville` kann und soll hierbei benutzt werden.

c) Testen Sie ihr Programm an den Funktionen

$$f_1(x) = e^{-x}, \quad f_2(x) = \arctan(x)$$

auf dem Intervall $[-5, 5]$. Verwenden Sie dazu zunächst n äquidistante Stützstellen, danach n Tschebyscheff-Knoten ($n = 5, 25, 125$) und interpretieren Sie das Konvergenzverhalten.

4. Aufgabe (4 Zusatz-TP)

Sei $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Knotenverteilung im Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass der Interpolationsoperator

$$C[a,b] \ni f \mapsto \varphi(f) = p_n \in \mathcal{P}_n$$

eine Projektion ist und die Norm $\|\varphi\|_\infty = \Lambda_n$ hat, wobei

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|$$

die Lebesque-Konstante ist und L_k die Lagrange-Polynome bezeichnet.