

8. Übung zur Vorlesung

NUMERIK I

SoSe 2015

[http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS\\_2015/NumerikI.php](http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2015/NumerikI.php)

**Abgabe: Fr., 19.06.2015, 12:00 Uhr**

ALLGEMEINE HINWEISE

Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

**1. Aufgabe** (8 TP)

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  sei ein Gitter  $a = x_0^n < \dots < x_n^n = b$  mit Gitterweite  $h_n = \max_{k=1, \dots, n} |x_k^n - x_{k-1}^n|$  gegeben. Für  $f \in C^0([a, b])$  und  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $I_n f \in C^0([a, b])$  die stückweise lineare Interpolation von  $f$  auf dem Gitter  $(x_k^n)_k$ , d. h. diejenige Funktion mit

$$\begin{aligned} I_n f(x_k^n) &= f(x_k^n) \text{ für alle } k \in \{0, \dots, n\}, \\ I_n f|_{[x_{k-1}^n, x_k^n]} &\in \mathcal{P}_1 \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie für  $f \in C^1([a, b])$  die Abschätzung

$$\|f - I_n f\|_\infty \leq h_n \|f'\|_\infty.$$

b) Zeigen Sie für  $f \in C^{0,\alpha}([a, b])$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  und eine von  $f$ ,  $h$  und  $n$  unabhängige Konstante  $c$  die Abschätzung

$$\|f - I_n f\|_\infty \leq c h_n^\alpha \|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}.$$

c) Zeigen Sie für  $f \in C^0([a, b])$  die Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - I_n f\|_\infty = 0.$$

d) Finden Sie ein Beispiel für ein  $f \in C^\infty([a, b])$ , sodass für alle  $\varepsilon > 0$  und  $c > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$n \in \mathbb{N}, n \geq N \quad \implies \quad \|f - I_n f\|_\infty \geq c h_n^{2+\varepsilon}.$$

**Hinweis:** Der Hölder-Raum  $C^{0,\alpha}([a, b])$  ist für  $\alpha \in (0, 1]$  definiert durch

$$\begin{aligned} C^{0,\alpha}([a, b]) &:= \{f \in C^0([a, b]) \mid \|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])} < \infty\}, \\ \|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])} &:= \sup_{x,y \in [a,b]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned}$$

D. h. es gilt  $f \in C^{0,\alpha}([a, b])$  genau dann, wenn  $f$  Hölder-stetig mit Exponent  $\alpha$  ist und  $\|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}$  ist genau der minimale Hölder-Koeffizient.

## 2. Aufgabe (8 PP)

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{array}{lll} f_1: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} & f_2: [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R} & f_3: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) & x \longmapsto \frac{1}{1+x^2} & x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$$

Berechnen Sie für jede dieser Funktionen und für alle  $n \in \{5, 10, 20, 30, 40, 50\} =: N$  die

- Polynominterpolation  $p_n^1 f_i$  mit äquidistantem Gitter,
- Polynominterpolation  $p_n^2 f_i$  mit Tschebyscheff-Knoten,
- Hermite-Interpolation  $p_n^3 f_i$  mit  $x_0 = \dots = x_n = \frac{a_i+b_i}{2}$  und die
- stückweise lineare Spline-Interpolation  $p_n^4 f_i$  mit äquidistantem Gitter.

Plotten Sie anschließend für alle  $(i, j, n) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \times N$  den approximierten Fehler  $\|f_i - p_n^j f_i\|_{[a_i, b_i]}$  in einer geeigneten logarithmischen Skalierung. Dabei ist die Approximation  $\|\cdot\|_{[a, b]}$  der  $\infty$ -Norm auf  $C([a, b])$  gegeben durch

$$\|g\|_{[a, b]} = \max_{x \in \widetilde{[a, b]}} |g(x)|, \quad \widetilde{[a, b]} = \left\{ a + k \frac{b-a}{1000} \mid k = 0, \dots, 1000 \right\}.$$

Welche Konvergenzverhalten beobachten Sie? Decken sich die Ergebnisse mit Ihren Erwartungen aus der Vorlesung und den Übungen?

**Hinweis:** Für  $f_2$  dürfen Sie die Hermite-Interpolation auslassen. Falls Sie neugierig auf die Ergebnisse für  $p_n^3 f_2$  sind, können Sie beispielsweise  $N' := \{3, 5, 8, 10, 13, 15\}$  wählen und versuchen, die benötigten höheren Ableitungen von  $f_2$  in MATLAB symbolisch zu berechnen.