Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

10. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2015

`http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2015/NumerikI.php`

Abgabe: Fr., 03.07.2015, 12:00 Uhr Allgemeine Hinweise

Die Punkte unterteilen sich in Theoriepunkte (TP) und Programmierpunkte (PP). Bitte beachten Sie die auf der Vorlesungshomepage angegebenen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe der Übungszettel, insbesondere der Programmieraufgaben.

1. Aufgabe (4 TP)
Zu $n \in \mathbb{N}$ seien Quadraturpunkte $0 \leq z_0 < \cdots < z_n \leq 1$ und Quadraturgewichte $\mu_i = \int_0^1 L_i(z)\, dz$ für $i = 0, \ldots, n$ gegeben, wobei L_i das i-te Lagrange-Polynom ist. Für ein Gitter $a = x_0 < \cdots < x_m = b$ auf $[a, b]$ betrachten wir die summierte Quadraturformel

$$I_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} f(x_{ik})\mu_i h_k, \qquad x_{ik} = x_{k-1} + z_i h_k, \qquad h_k = x_k - x_{k-1}.$$

Zeigen Sie für $f \in C^{n+2}([a, b])$ und $h := \max_{k\in\{1,\ldots,m\}} h_k$, dass I_Δ der Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - I_\Delta(f) \right| \leq (b-a)\frac{\|f^{n+2}\|}{(n+2)!} h^{n+2}$$

genügt, falls n gerade ist und die z_i symmetrisch im Intervall $[0, 1]$ liegen.

2. Aufgabe (4 PP)

a) Implementieren Sie ein Verfahren zur summierten Gauß-Quadratur, indem Sie eine Funktion `y = gauss_quad( f_handle, a, b, n, m )` schreiben, der ein Funktionen-Handle `f_handle`, Intervallgrenzen `a`, `b`, der zu verwendende Polynomgrad `n` (mit $n \in \{1, \ldots, 4\}$) und die Anzahl der Teilintervalle `m` übergeben werden. Geben Sie in `y` das Ergebnis der Quadratur zurück. Testen Sie Ihr Verfahren anhand geeigneter Monome x^i auf dem Intervall $[0, 1]$ auf Richtigkeit.

   Hinweis: Sie müssen die Gewichte und Stützstellen nicht selbst berechnen, sondern dürfen die Werte aus der Literatur verwenden.

b) Testen Sie Ihre Implementation an der Funktion $f(x) = \frac{2\ln(\frac{x}{2}+1)}{x^2+4}$ auf dem Intervall $[0, 2]$ für alle $n \in \{1, \ldots, 4\}$ und verschiedene Werte von m. Plotten sie zu jedem `n` jeweils die Quadratur-Fehler bezüglich `m`. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{8}\pi$.

3. Aufgabe (8 Zusatz-PP)

a) Implementieren ein Verfahren zur adaptiven Mehrgitter-Quadratur mit Hilfe der Trapez- bzw. Simpson-Regel.

Genauer, schreiben Sie eine Funktion

```
y = multigrid_quad( f_handle, a, b, n, Nmax, tol ),
```

wobei `f_handle` ein Funktionen-Handle der zu integrierenden Funktion, `a` bzw. `b` die untere bzw. obere Integrationsgrenze, n die Anzahl der zu Beginn gegebenen äquidistanten Intervalle, `Nmax` die maximal zulässige Anzahl an Intervallen und `tol` die für das Abbruchkriterium verwendete Toleranz beschreibt.

Nehmen Sie die Saturationsbedingung für die übergebene Funktion an. Berechnen Sie zum Gitter Δ_j im j-ten Schritt des Verfahrens für alle Teilintervalle $I_{k,j}$ lokale a posteriori Fehlerschätzungen $e_{I_{k,j}}(f)$ des Diskretisierungsfehlers in $I_{k,j}$ mit der Simpson-Regel.

Brechen Sie das Verfahren ab, sobald die Anzahl an Intervallen den Wert `Nmax` überschreitet oder der geschätzte globale Fehler $e_{\Delta_j}(f) = \sum_k e_{I_{k,j}}(f)$ die Genauigkeitsbedingung $|e_{\Delta_j}(f)| \leq \frac{1}{2}\texttt{tol}$ erfüllt. Andernfalls verfeinern Sie diejenigen Intervalle $I_{k,j}$ mit maximalem $|e_{I_{k,j}}(f)|$, indem Sie deren Mittelpunkte zu Δ_j hinzuügen um Δ_{j+1} zu erhalten.

b) Testen Sie Ihre Implementation anhand der Integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(\gamma x)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{\gamma}\arctan(\gamma)$$

mit $\gamma = 1, 10, 100, 500$. Wählen Sie $n = 10$, $N_{\max} = 1000$ und tol $= 10^{-10}$. Plotten Sie anschließend den exakten Fehler gegen die Anzahl der verwendeten Stützstellen unter Verwendung einer geeigneten logarithmischen Skalierung. Plotten Sie zum Vergleich jeweils auch den exakten Fehler der summierten Trapez-Regel mit uniformem Gitter und gleicher Anzahl an Quadraturpunkten. Was beobachten Sie?