Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Carsten Gräser, Tobias Kies

11. Übung zur Vorlesung

Numerik I

SoSe 2015

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/SS_2015/NumerikI.php

Abgabe: Fr., 10.07.2015, 12:00 Uhr

1. Aufgabe (4 TP)
Sei $y : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^d$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad y(T_0) = y_0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass sich dieses nicht-autonome Anfangswertproblem autonomisieren lässt, indem Sie ein $x : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^{d+1}$ sowie eine Funktion f und einen Startwert x_0 konstruieren, so dass folgendes gilt: x ist genau dann Lösung des autonomen Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \in (T_0, T_1], \quad x(T_0) = x_0,$$

wenn y eine Lösung von (1) ist.

2. Aufgabe (4 Zusatz-TP)
Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Zeigen Sie:

a) $g(M) \subset M$

b) $|g(x) - g(y)| < |x - y| \ \forall x, y \in M, \ x \neq y$

c) g besitzt *keinen* Fixpunkt in M

Warum ist dies kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz?

3. Aufgabe (2 Zusatz-TP)
Sei V ein Prähilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die Basis eines Unterraums von V. Zeigen Sie, dass die Gramsche Matrix $A = ((\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1,\dots,n}$ positiv definit ist.

4. Aufgabe (4 Zusatz-TP)
Zeigen Sie:

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, und $QR = A$ eine QR-Zerlegung von A, wobei A vollen Rang habe. Dann bilden die ersten n Spalten von Q eine Orthonormalbasis des Bildes $R(A)$ von A.

b) Die Householder-Reflexionen sind Orthogonaltransformationen.

5. Aufgabe (2 Zusatz-TP)
Zeigen Sie, dass für die Gewichte λ_k der Newton-Cotes Formeln gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$$