Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ralf Kornhuber, Maren-Wanda Wolf

1. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik II

SoSe 2016

Abgabe: 6.5.2016

1. Aufgabe (4 TP)
Es soll der Wert einer unbekannten Funktion $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ an der Stelle $\tilde{x} = \frac{1}{2}$ approximiert werden. Bekannt sind für $\varepsilon > 0$ die Werte $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ und $f(1 + \epsilon) = 1$.
Dazu soll ein Polynom p vom Grad $d = 2$ durch diese Punkte gelegt und an der Stelle $\tilde{x}$ ausgewertet werden. Ein solches Polynom lässt sich darstellen durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

Um den Koeffizientenvektor $a = (a_0, a_1, a_2)^T \in \mathrm{R}^3$ zu bestimmen, kann zum Beispiel ein lieneares Gleichungsystem $Ma = b$ mit

$$M_{ij} = x_i^{j-1}, \quad b_i = f(x_i), \qquad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

aufgestellt und gelöst werden. Mit bekanntem a kann dann das Polynom p an jeder Stelle $x \in \mathrm{R}$ ausgewertet werden.

a) Bestimmen sie die Matrix M und den Vektor b in Abhängigkeit von ε.

b) Betsimmen sie den Koeffizientenvektor a.

c) Werten sie p an der Stelle $\tilde{x}$ aus.

2. Aufgabe (4 PP)
Schreiben sie ein `MATLAB` Programm `interpolation(x,fx,z)`, das für beliebigen Grad d nach dem in Aufgabe 1 beschriebnen Verfahren eine Matrix aufstellt, das lineare Gleichungssystem löst und das zugehörige Polynom an der Stelle `z` auswertet. Dabei sollen die Einträge von `x` die Stellen x_i und die von `fx` die Werte $f(x_i)$ enthalten. Testen sie ihr Programm mit den drei gegebenen Punkten aus Aufgabe 1 für die Fälle $\varepsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-5}$. Was beobachten sie?

3. Aufgabe (3 TP)
Berechnen sie die Kondition der Matrix aus Aufgabe 1 bezüglich der Maximumsnorm in Abhängigkeit von ε. Was geschieht für $\varepsilon \to 0$?